

Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} xe^{-\ln^2 x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

- α)** Να δείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(0, f(0))$.
- β)** **i.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
ii. Να λύσετε την εξίσωση $e^{\ln^2 x + \frac{1}{4}} \left(2 - \eta\mu \left(\frac{x\pi}{2\sqrt{e}} \right) \right) = x$, $x > 0$.
- γ)** **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να δείξετε ότι βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
ii. Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την (ε) και την ευθεία $x = \alpha$ με $0 < \alpha < 1$, να δείξετε ότι $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} E(\alpha) \leq \frac{1}{2}$.
- δ)** **i.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία κάμψης.
ii. Αν $A \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, f \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right) \right)$, $B(e, f(e))$ και Γ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα A και B , να δείξετε ότι:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^e f(x) dx < (AB\Gamma) + \frac{\left[f(e) + f \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right) \right] \left(e - \frac{1}{\sqrt{e}} \right)}{2}$$