

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(e^{1-x} + 1) + \alpha x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η ευθεία $y = x - 1$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -1$.

β) i. Να βρείτε την ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο επαφής της με αυτήν έχει τετμημένη $x_0 > 1$.

δ) i. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x \neq x_0$.

ii. Να δείξετε ότι $\int_0^{x_0} f(x) dx > \frac{x_0^2}{2e^{1-x_0}}$.

ε) i. Να ορίσετε τη συνάρτηση $\varphi = f \circ g$ με $g(x) = \ln x$.

ii. Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ , τον άξονα $x'x$ την ευθεία $x = 1$ και την ευθεία $x = \lambda$ με $0 < \lambda < 1$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.

στ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} e^{1-f^{-1}(y)} dy$ όπου $A(\alpha, 0), B(\beta, \beta)$ είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της αντίστροφής της f^{-1} με τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $y = x$ αντίστοιχα.