5.3 Γεωμετρική πρόοδος

1. Μια γεωμετρική πρόοδος (α_ν) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

2. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με θετικό λόγο λ, για την οποία ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

β) Να δείξετε ότι ο $\nu -$ οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$.

3. **α)** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x, $2x+1$, $5x+4$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i. $x = 1$ **ii.** $x = -1$

4. **α)** Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4,\ 2-x,\ 6-x,$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Αν $x = 5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

i. το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

ii. τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

5. Οι αριθμοί $\kappa-2,\ 2\kappa,\ 7\kappa+4,\ \kappa \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

β) **i.** Να εκφράσετε τον 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1.

ii. Να αποδείξετε ότι: $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$.

6. **α)** Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (1).

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

7. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0\ (1)$, με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

8. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι λ = 3.

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

9. Δίνεται μία πρόοδος (α_ν) με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \ldots$.

α) Να εξετάσετε αν η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να αποδείξετε ότι η (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το ν – οστό της όρο.

10. **α)** Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ ώστε οι αριθμοί $\kappa - 2, \kappa, 2\kappa + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

11. **α)** Αν οι αριθμοί $4 - x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

β) Αν οι αριθμοί $4 - x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί αριθμοί αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

12. Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά από το ατύχημα.

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

13. Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) Να βρείτε

i. το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον ν – οστό μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

ii. το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον ν – οστό μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

iii. το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

iv. το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

β) **i.** Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

ii. Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

14. Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204.800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102.400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες υπάρχουν 51.200 βακτήρια , και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3.200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης $(\nu \leq 5)$.

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii. Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν.

iii. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

15. Δίνεται ορθογώνιο μήκους α, πλάτους β και εμβαδού E. Οι αριθμοί α, E, β, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E.

β) Αν $E = 1$ και $\alpha + \beta = 10$,

i. να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες α και β.

ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου.

16. Δίνονται οι αριθμοί $2, x, 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

β) Να βρείτε τον αριθμό x, ώστε οι $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος $2, 5, 8, 11, \ldots$ και (β_ν) η γεωμετρική πρόοδος $2, 4, 8, 16, \ldots$, τότε να βρείτε:

i. το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν),

ii. την τιμή του ν, ώστε για το άθροισμα S_ν του γi) ερωτήματος να ισχύει: $2\cdot(S_\nu+24)=\beta_7$.

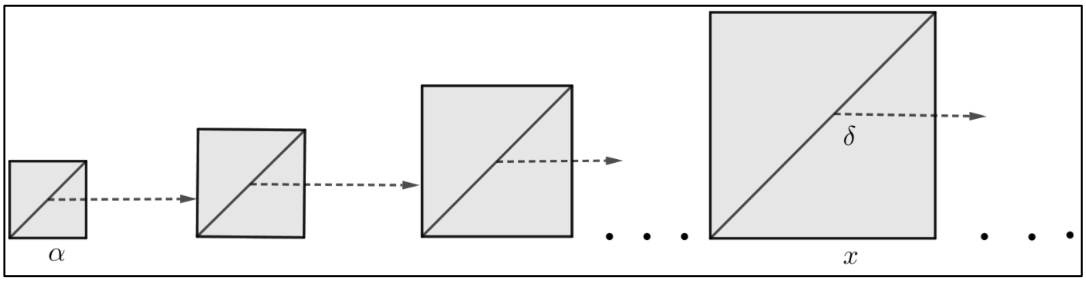
17. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν: $\alpha_3=4,\ \alpha_5=16$ και $\lambda>0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu=\dfrac{1}{\alpha_\nu}$, $\nu=1,2,3,...$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

γ) Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_ν) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_ν) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10}=\dfrac{1}{2^9}S_{10}$.

18. Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α) **i.** Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta=\sqrt{2}\cdot x$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda=2$ και γενικό όρο $\alpha_\nu=\alpha^2\cdot 2^{\nu-1}$.

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ.

19. Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν): $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}, \dfrac{81}{2}, \dfrac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου,

ii. $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$.

β) Αν $\alpha_7=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν – οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_ν) είναι ίσο με $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

20. Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ $(\kappa \neq 0,\ \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1)$. Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda},\ \kappa,\ \kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda},\ \kappa \cdot \lambda,$ $(\kappa > 0,\ \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$, να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda},\ \kappa,\ \kappa \cdot \lambda$.