

5.3 Γεωμετρική πρόοδος

1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $(2x-1)(x-2)(x-1)=0$.

β) Να τοποθετήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης σε αύξουσα σειρά και να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.
2.

α) Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)(x^2-4)=0$.

β) Να διατάξετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης σε αύξουσα σειρά και να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά δεν αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.
3.

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \frac{1}{2}$.

β) Να βρείτε τον πέμπτο όρο της προόδου.

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων πέντε όρων της προόδου.
4.

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος: $4, 8, 16, 32, \dots$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.
5.

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με $\alpha_2 = 8$ και $\lambda = 2$.

α) Να δείξετε ότι ο 1ος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 4$.

β) Να υπολογίσετε τον 7ο όρο α_7 της προόδου.

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 7 όρων της προόδου (α_n) .
6.

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με πρώτους όρους τους $1, 3, 9, \dots$

α) Να βρείτε τον τέταρτο όρο α_4 της προόδου (α_n) .

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της (α_n) είναι: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 121$.
7.

α) Να εξετάσετε αν οι πραγματικοί αριθμοί $-3, 9, -27$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι πραγματικοί αριθμοί $9, x, 81$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
8.

α) Να εξετάσετε αν οι πραγματικοί αριθμοί $1, 2, 4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να βρείτε το x ώστε οι πραγματικοί αριθμοί $1, x, 4$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

9. Μια αριθμητική πρόοδος (α_n) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 0$ και διαφορά $\omega = 12$.

α) Να δείξετε ότι ο 17ος όρος της προόδου είναι $\alpha_{17} = 192$.

β) Ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου (β_n) είναι ίσος με 6 και ο έκτος όρος της ισούται με τον 17ο της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

i. Να γράψετε μια εξίσωση με άγνωστο τον λόγο λ της προόδου χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πληροφορίες.

ii. Να βρείτε τον λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

10. Έστω x, y, z πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{5} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ και $3x - 4y + 5z = 45$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $x = 3\lambda, y = 4\lambda + 1$ και $z = 5\lambda - 1$.

ii. $\lambda = 3$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y, z .

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί x, y, z που βρήκατε είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

11. Μια μπάλα αφήνεται να πέσει στο έδαφος και μετά την πρώτη αναπήδηση φτάνει σε ύψος h μέτρων. Το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα μετά από κάθε αναπήδηση είναι το μισό του προηγούμενου.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διαδοχικά ύψη που θα φτάσει ή μπάλα είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_n) με πρώτο όρο $\alpha_1 = h$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$ και να γράψετε τον γενικό της όρο.

β) Αν μετά την δεύτερη αναπήδηση η μπάλα φτάσει σε ύψος δύο μέτρων (2m), να βρείτε το ύψος h της πρώτης αναπήδησης.

12. Οι τρεις πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής προόδου, με τη σειρά που δίνονται, είναι:

$$k - 1, 6 \text{ και } 3k, k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{R} - \{0,1\}.$$

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του $k \in \mathbb{R} - \{0,1\}$.

β) Για $k = 4$, να βρείτε:

i. τον τέταρτο όρο της προόδου.

ii. τον πρώτο όρο της προόδου που υπερβαίνει τον αριθμό $3 \cdot 2^8$.

13. α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών $\frac{8}{x}$ και $32x$ είναι ο αριθμός 16, όπου x τυχαίος πραγματικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν.

β) Οι αριθμοί $\frac{8}{x}$, 16, $32x$ με αυτή τη σειρά, είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) , με λόγο

$$\lambda = 4.$$

i. Να αποδείξετε ότι $x = 2$.

ii. Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος αυτής της προόδου είναι $\alpha_n = 2^{2n}$, όπου n θετικός ακέραιος.

14. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) , με $\alpha_3 = -8$ και $\alpha_6 = -64$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος είναι $\lambda = 2$ και ο πρώτος όρος $\alpha_1 = -2$.

β) Να αποδείξετε ότι : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = -62$.