

6.1 Η έννοια της συνάρτησης

1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(0)$ και $f(-1)$.

β) Για $x < 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \leq 2$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ με $x \neq 2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x + 2$ με $x \neq 2$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 4$.

3. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4$.

α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς $f(-2)$ και $f(1)$ είναι μεγαλύτερος.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(2)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 7$ και να γράψετε τη λύση της σε διάστημα.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς $f(-2)$ και $f(1)$ είναι μεγαλύτερος.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x}{3x^2 - x - 2}$.

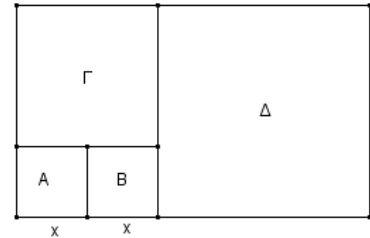
- α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση f .
- β) Να παραγοντοποιήσετε τον παρονομαστή της συνάρτησης f .
- γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = \frac{1}{4}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = |x - 2| + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(2)$ και $f(-2)$.
- β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 7$.
- γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση να πάρει την τιμή 2.

9. Το διπλανό σχήμα αποτελείται από τέσσερα τετράγωνα Α, Β, Γ, Δ. Αν καθένα από τα Α, Β έχει πλευρά ίση με x , $x > 0$ τότε:

- α) Να βρείτε την περίμετρο του σχήματος.
- β) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν του $E(x)$ ισχύει $E(x) = 15x^2$
- γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του αριθμού x το εμβαδόν είναι μικρότερο από 240.



10. Θεωρούμε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ και τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$

- α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου και να το παραγοντοποιήσετε.
- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης και να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ο παραπάνω τύπος της συνάρτησης γράφεται $f(x) = \frac{x}{x - 3}$
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |2x - 5| + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(3)$ και $f\left(\frac{5}{2}\right)$.
- β) Να δικαιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση.
- γ) Έστω $x \geq \frac{5}{2}$.
- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - 1$.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2}{5} + x = f(x)$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή της όταν $x = 2$ και όταν $x = -3$.

β) Έστω $x > 2$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2(x - 1)$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = (x - 2)(x - 1)$.

13. α) Να αποδείξετε ότι: $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - 2$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

iii. Να βρείτε, αν υπάρχει, τιμή του πραγματικού αριθμού x , για την οποία $f(x) = -1$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3| + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) = 3$ δεν έχει λύση.

γ) Έστω $x \geq 3$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + 1$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2}{16} + x = f(x)$.