

3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

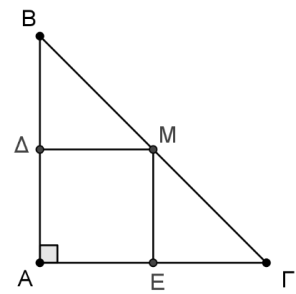
3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

3.12 Τριγωνική ανισότητα

1. ΘΕΜΑ\_2\_36331

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και από το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $M\Delta$  και  $ME$  στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

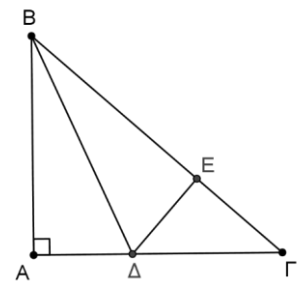
- α) Αν είναι  $M\Delta = ME$ , τότε:
- i. τα τρίγωνα  $B\Delta M$  και  $\Gamma E M$  είναι ίσα,
  - ii. το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- β) Αν είναι  $AB = A\Gamma$ , τότε  $M\Delta = ME$ .



2. ΘΕΜΑ\_2\_36168

Στο σχήμα, το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία  $\hat{A}$  και η γωνία  $\hat{\Gamma}$  είναι μικρότερη της γωνίας  $\hat{B}$ . Η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας και η  $\Delta E$  είναι κάθετη στην  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

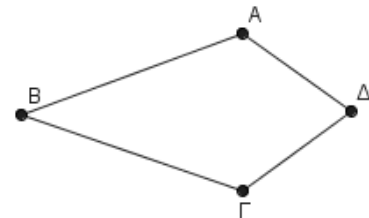
- α)  $A\Delta = \Delta E$ ,  
 β)  $A\Delta < \Delta\Gamma$ ,  
 γ)  $A\Gamma > AB$ .



3. ΘΕΜΑ\_2\_34514

Έστω κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $BA = B\Gamma$  και  $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι:

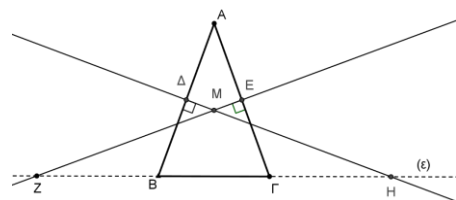
- α)  $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$ ,  
 β) το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές,  
 γ) η ευθεία  $B\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $A\Gamma$ .



4. ΘΕΜΑ\_2\_34507

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$  των πλευρών του  $AB$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Έστω ότι οι μεσοκάθετες ευθείες των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  τέμνονται στο  $M$  και οι οποίες τέμνουν τον φορέα ( $\varepsilon$ ) της βάσης  $B\Gamma$  στα σημεία  $H$  και  $Z$ .

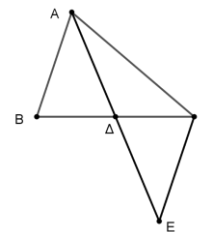
- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $\Delta B H$  και  $E Z \Gamma$ .  
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $M Z H$  είναι ισοσκελές.



5. ΘΕΜΑ\_2\_34502

Στο ακόλουθο σχήμα, η  $A\Delta$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$  και το  $E$  είναι σημείο στην προέκταση της  $A\Delta$ , ώστε  $\Delta E = A\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $AB = \Gamma E$ ,
- β)  $AE < AB + A\Gamma$ .



6. ΘΕΜΑ\_2\_34496

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα ύψη του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  που αντιστοιχούν στις πλευρές του  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.

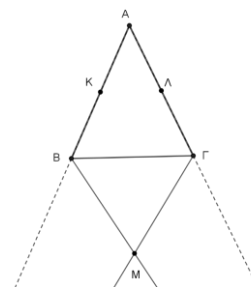
Να αποδείξετε ότι:

- α) Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ , τότε τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα.
- β) Αν τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα, τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $A\Gamma = AB$ .

7. ΘΕΜΑ\_2\_34415

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  τέμνονται στο σημείο  $M$  και τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο  $BM\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $MB = M\Gamma$ ,
- β)  $MK = M\Lambda$ .



8. ΘΕΜΑ\_2\_34396

Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), η διχοτόμος τη γωνίας  $\hat{\Gamma}$  τέμνει την πλευρά  $AB$  σε σημείο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε προς την πλευρά  $B\Gamma$  μια κάθετη ευθεία, η οποία τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  σε σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $A\Delta = \Delta E$ ,
- β)  $A\Delta < \Delta B$ .

9. ΘΕΜΑ\_3\_12069

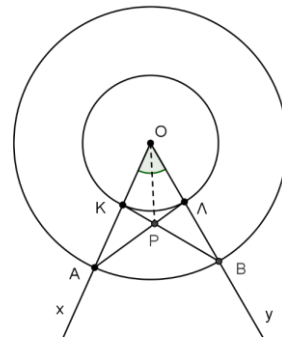
Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) παίρνουμε στην πλευρά  $AB$  σημείο  $\Delta$ , ώστε  $\Delta B = 2A\Delta$ , και στην πλευρά  $A\Gamma$  σημείο  $E$ , ώστε  $E\Gamma = 2A E$ . Το  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

- α) Να αποδείξετε ότι:
  - i. τα τμήματα  $\Delta B$  και  $E\Gamma$  είναι ίσα,
  - ii. το τρίγωνο  $M\Delta E$  είναι ισοσκελές.
- β) Αν  $P$  το σημείο τομής των τμημάτων  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  να δείξετε ότι:
  - i. Οι γωνίες  $\hat{\Gamma B E}$  και  $\hat{B \Gamma \Delta}$  είναι ίσες.
  - ii. το τμήμα  $PM$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{B P \Gamma}$ .

### 10. ΘΕΜΑ\_4\_37095

Δίνεται οξεία γωνία  $\widehat{xOy}$  και δύο ομόκεντροι κύκλοι  $(O, \rho_1)$  και  $(O, \rho_2)$  με  $\rho_1 < \rho_2$ , που τέμνουν την  $Ox$  στα σημεία  $K, A$  και στην  $Oy$  στα  $\Lambda, B$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- $AL = BK$ ,
- το τρίγωνο  $APB$  είναι ισοσκελές, όπου  $P$  το σημείο τομής των  $AL$  και  $BK$ ,
- η  $OP$  διχοτομεί την  $\widehat{xOy}$ .



### 11. ΘΕΜΑ\_4\_37094

Έστω  $AB\Gamma$  τρίγωνο και τα ύψη του  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  που αντιστοιχούν στις πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

**Π:** Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ , τότε τα ύψη  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

- Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- Να διατυπώσετε την **αντίστροφη** πρόταση της **Π** και να αποδείξετε ότι ισχύει.
- Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την **αντίστροφή της** ως ενιαία πρόταση.

### 12. ΘΕΜΑ\_4\_1749

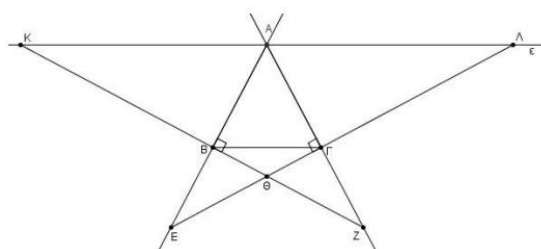
Θεωρούμε δυο σημεία  $A$  και  $B$  τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία  $(\epsilon)$ , τέτοια ώστε η ευθεία  $AB$  δεν είναι κάθετη στην  $(\epsilon)$ . Έστω  $A'$  το συμμετρικό του  $A$  ως προς την ευθεία  $(\epsilon)$ , δηλαδή η  $(\epsilon)$  είναι μεσοκάθετος του  $AA'$ .

- Αν η  $A'B$  τέμνει την ευθεία  $(\epsilon)$  στο σημείο  $O$ , να αποδείξετε ότι:
  - Η ευθεία  $(\epsilon)$  διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{AOA'}$ .
  - Οι ημιευθείες  $OA$  και  $OB$  σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία  $(\epsilon)$ .
- Αν  $K$  είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία  $(\epsilon)$ , να αποδείξετε ότι:
  - $KA = KA'$ ,
  - $KA + KB > AO + OB$ .

### 13. ΘΕΜΑ\_4\_1875

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ), και την ευθεία  $\epsilon$  της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας  $A$ . Η κάθετη στην πλευρά  $AB$  στο  $B$  τέμνει την  $\epsilon$  στο  $K$  και την ευθεία  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Η κάθετη στην πλευρά  $A\Gamma$  στο  $\Gamma$  τέμνει την  $\epsilon$  στο  $\Lambda$  και την ευθεία  $AB$  στο  $E$ .

- Να αποδείξετε ότι:



i.  $AZ = AE$ ,

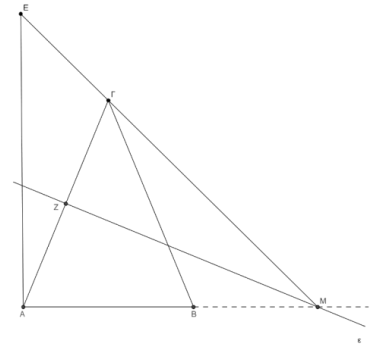
ii.  $AK = AL$ .

- β) Ένας μαθητής, κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η  $A\Theta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , όπου  $\Theta$  το σημείο τομής των  $KZ$  και  $EL$ . Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

**14. ΘΕΜΑ\_4\_37823**

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AG = BG$ ). Η μεσοκάθετη ( $\varepsilon$ ) της  $AG$  τέμνει την προέκταση της  $AB$  (προς το μέρος του  $B$ ) στο σημείο  $M$  και την  $AG$  στο  $Z$ . Στην προέκταση της  $MG$  (προς το μέρος του  $\Gamma$ ) παίρνουμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $GE = BM$ .

- α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AM\Gamma$  είναι ισοσκελές.  
β) Να δείχτεί ότι τα τρίγωνα  $AG\Gamma$  και  $\Gamma BM$  είναι ίσα.  
γ) Να δείχτεί ότι το τρίγωνο  $AME$  είναι ισοσκελές.



**15. ΘΕΜΑ\_4\_37124**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < AG$ . Στην προέκταση της  $AB$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  έτσι ώστε  $AE = AG$ . Στην πλευρά  $AG$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  έτσι ώστε  $A\Delta = AB$ . Αν τα τμήματα  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  τέμνονται στο  $K$  και η προέκταση της  $AK$  τέμνει την  $E\Gamma$  στο  $M$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- α)  $B\Gamma = \Delta E$ ,  
β)  $BK = K\Delta$ ,  
γ) Η  $AK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ .  
δ) Η  $AM$  είναι μεσοκάθετος της  $E\Gamma$ .

