

3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

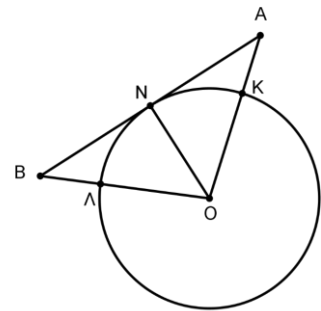
1. ΘΕΜΑ_2_13759

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

- α) $d = 3$ β) $d = 6$ γ) $d = 9$

2. ΘΕΜΑ_2_36344

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα.

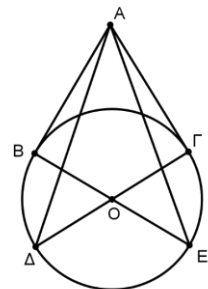


Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές,
β) το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.

3. ΘΕΜΑ_2_36354

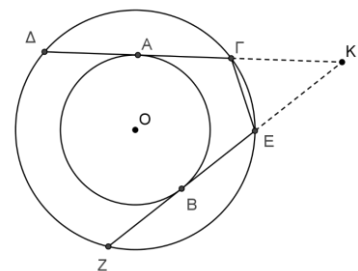
Έστω κύκλος (O, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο A . Από το A φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$ του κύκλου και έστω E και Δ τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α) τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα,
β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

4. ΘΕΜΑ_2_36338

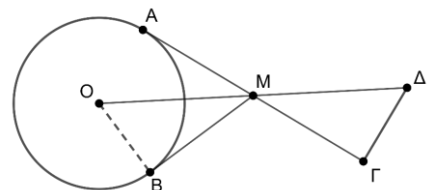
Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και $Z\epsilon$ του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.



- α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = Z\epsilon$.
β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και $Z\epsilon$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

5. ΘΕΜΑ_2_36098

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = OM$.



α) Να αποδείξετε ότι $MB = MG$.

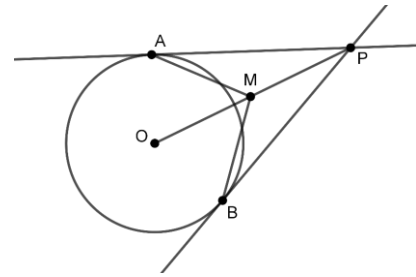
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $MΓΔ$ είναι ίσα.

6. ΘΕΜΑ_2_36095

Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα,

β) οι γωνίες $\hat{M}AO$ και $\hat{M}BO$ είναι ίσες.

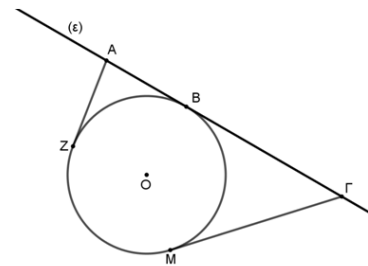


7. ΘΕΜΑ_2_13817

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ϵ) . Θεωρούμε στην ευθεία (ϵ) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.

α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + M\Gamma$.

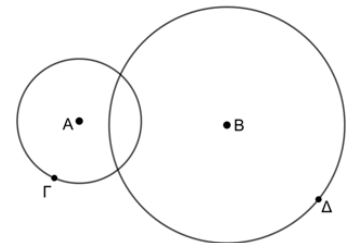


8. ΘΕΜΑ_2_13836

α) Στο σχήμα, για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.

Να αποδείξετε ότι $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$.

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;



9. ΘΕΜΑ_2_13758

Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α) $K\Lambda = 13$ β) $K\Lambda = 2$ γ) $K\Lambda = 5$ δ) $K\Lambda = 11$ ε) $K\Lambda = 9$

10. ΘΕΜΑ_2_13757

Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

- β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
- γ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- δ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

11. ΘΕΜΑ_2_12417

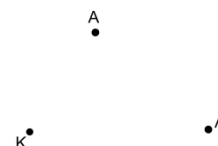
Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R = 3$, $r = 2$ και $K\Lambda = 4$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω Α και Β.
- β) $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$.

12. ΘΕΜΑ_2_13835

Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

- α) Να αποδείξετε ότι $1 < K\Lambda < 9$.
- β) Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.



13. ΘΕΜΑ_3_13702

Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ϵ) σε σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

- α) τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
- β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ εφάπτεται στη διάκεντρο ΚΛ των κύκλων (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) .

14. ΘΕΜΑ_4_1752

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές,
- β) $\Gamma A = \Delta B$,
- γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με $PA + PB$.

15. ΘΕΜΑ_4_1751

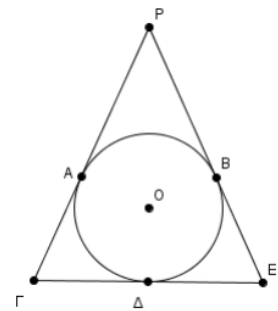
Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου PGE στα σημεία A, Δ και B .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $PG = \Gamma\Delta + AP$ ii. $PG - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

β) Αν $A\Gamma = BE$, να αποδείξετε ότι:

- i. το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές,
- ii. τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά.



16. ΘΕΜΑ_4_13846

Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $R > \rho$. Επίσης $AB = 9$.

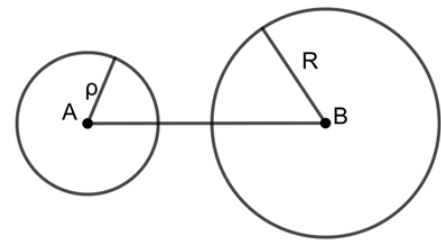
α) Να αποδείξετε ότι $R + \rho < 9$.

β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο $K\Lambda M$ με $K\Lambda$ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛM να είναι ίση με R . Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.

γ) Έστω το τρίγωνο $K\Lambda M$ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες I_1 και I_2 που περιγράφονται παρακάτω;

- I_1 : «Η απόσταση των σημείων από το K είναι ίση με ρ ».
- I_2 : «Η απόσταση των σημείων από το M είναι ίση με R ».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



17. ΘΕΜΑ_4_13823

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει

$\rho < R$ και $AB = 6$.

- i. Να αποδείξετε ότι $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$.
- ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα K και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το B .»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το A .»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6.

Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς τον θησαυρό;

