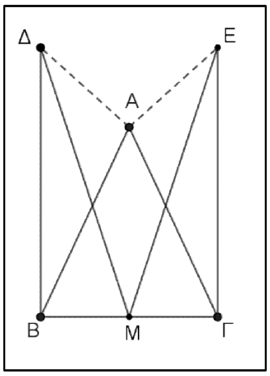
3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ, τα τμήματα ΒΔ ⊥ ΒΓ και ΓΕ ⊥ ΒΓ τέτοια ώστε ΒΔ = ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα,

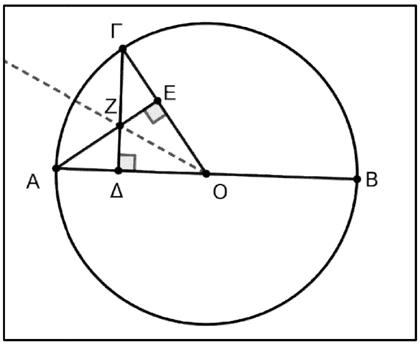
β) ΑΔ = ΑΕ.



2. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν τα ΑΕ, ΓΔ είναι κάθετα τμήματα στις ΟΓ, ΟΑ αντίστοιχα και Ζ το σημείο τομής τους, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές,

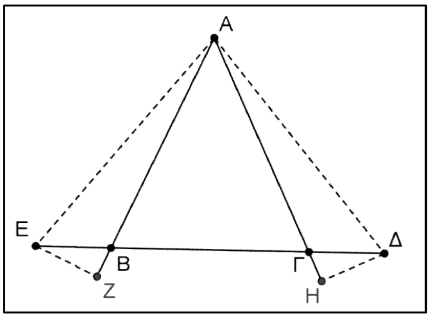
β) η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία $\hat{ΑΟΓ}$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ.



3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΓΔ = ΒΕ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ = ΑΕ,

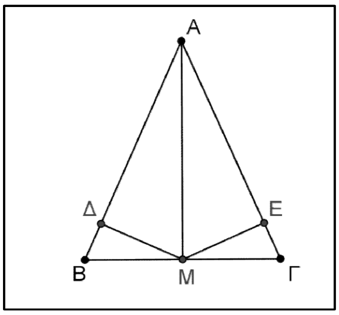
β) ΕΖ = ΔΗ.



4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) αν είναι ΜΔ = ΜΕ, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα,

β) αν είναι ΑΒ = ΑΓ και Μ μέσο του ΒΓ, τότε ΜΔ = ΜΕ.



5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^0\right)$ και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$. Από το Δ φέρουμε ευθεία κάθετη στη ΒΓ που την τέμνει σε σημείο Ε και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ΕΔ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΑ προς το Α. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΒΕ,

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα.

6. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ . Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα,

β) τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ .

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΔ = ΜΕ ,

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

8. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ . Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΚ = ΜΛ ,

β) η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $Κ\hat{Μ}Λ$.

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ . Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα,

β) ΑΔ = ΑΕ .

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα.

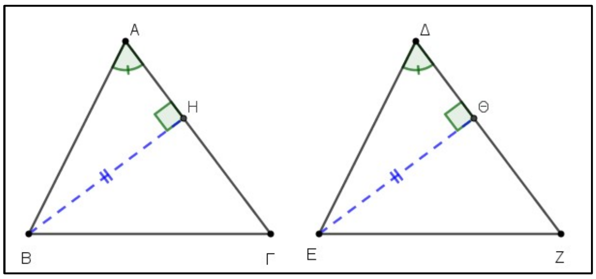
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα.

β) Έστω ΕΗ και ΔΖ οι κάθετες από τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα στη ΒΓ. Να αποδείξετε ότι ΕΗ = ΔΖ .

11. Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $\hat{Α} = \hat{Δ}$, $Α\hat{Β}Γ = Δ\hat{Ε}Ζ$. Αν τα ύψη τους ΒΗ και ΕΘ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΔΕ ,

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα .

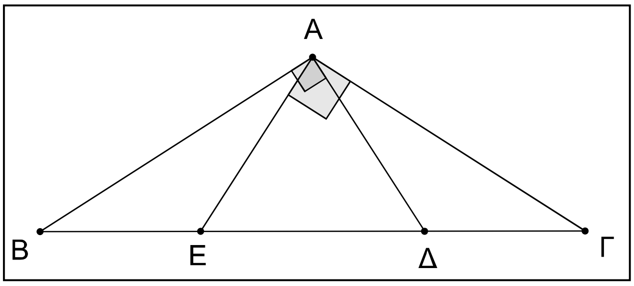


12. Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και η κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

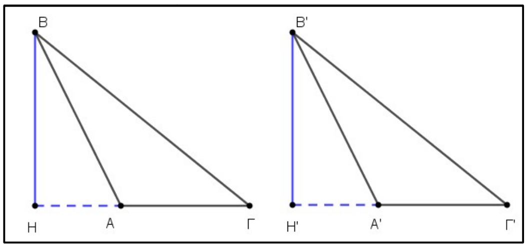
α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) $ΒΕ = ΓΔ$.



13. Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ $\left(\hat{A} > 90^o\right)$ και $A'B'\Gamma'$ $\left(\hat{A}' > 90^o\right)$ με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$. Αν τα ύψη ΒΗ και $B'H'$ των τριγώνων ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

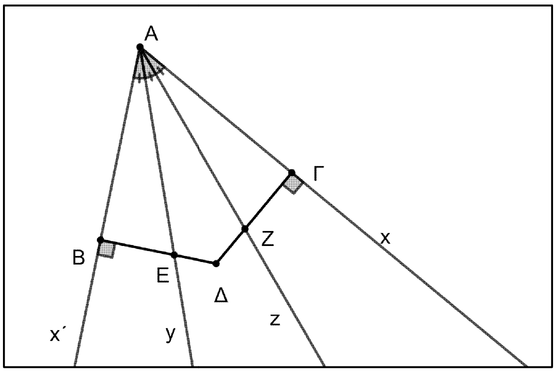


α) $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

14. Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'\hat{A}x$ θεωρούμε σημεία Β και Γ ώστε ΑΒ = ΑΓ. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ.

Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

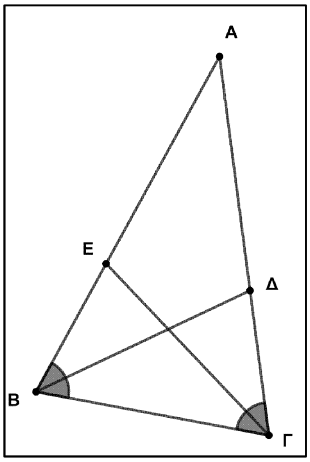


α) το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές,

β) το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{A}x$.

γ) οι γωνίες $\Gamma\hat{B}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ είναι ίσες.

15. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB < A\Gamma\right)$. Θεωρούμε τις διχοτόμους ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ, αντίστοιχα.

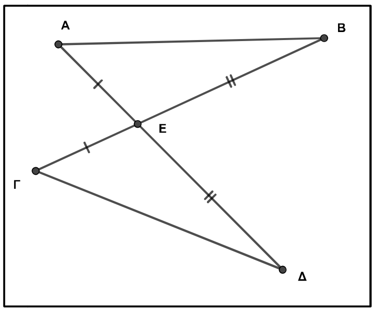


α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.

β) Από τα σημεία Ε και Δ φέρνουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: ΔΚ = ΕΛ.

γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και Κ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

16. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε έτσι ώστε $AE = \Gamma E$ και $BE = E\Delta$.

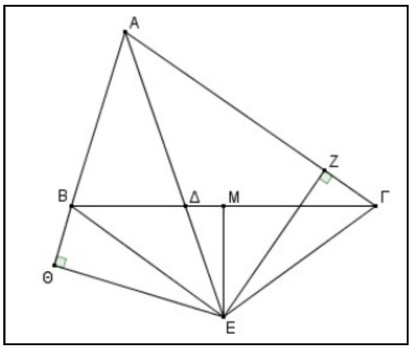


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ΕΗ και ΕΘ του σημείου Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, είναι ίσες.

γ) Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΓΔ προς τα Α και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

17. Στο τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{ΑΒ} < \text{ΑΓ})$ του σχήματος, η κάθετη στο μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε . Αν Θ , Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ , ΑΓ , να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές,

β) τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα,

γ) $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε} + \text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Ε} = 180^{\circ}$.