

1. ΘΕΜΑ_2_34779

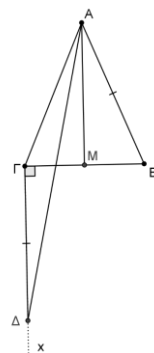
Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα $ΑΔ = ΑΒ$ και $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα,
- $ΕΔ // ΒΓ$.

2. ΘΕΜΑ_2_34777

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία Γχ κάθετη στη ΒΓ, προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α, και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $ΓΔ = ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:

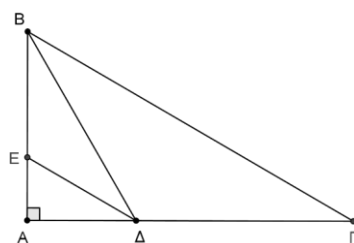
- η γωνία $Δ\hat{Α}Γ$ είναι ίση με τη γωνία $Γ\hat{Δ}Α$,
- $ΓΔ // ΑΜ$,
- η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Μ\hat{Α}Γ$.



3. ΘΕΜΑ_2_34776

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας $Α\hat{Δ}Β$ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.

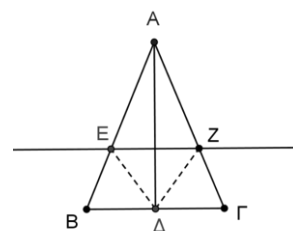
- Να αποδείξετε ότι:
 - $Ε\hat{Δ}Β = Δ\hat{Β}Γ$ και $Ε\hat{Δ}Α = \hat{Γ}$,
 - το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.
- Αν είναι $Α\hat{Δ}Β = 60^\circ$, τότε να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{Γ}$.



4. ΘΕΜΑ_2_34399

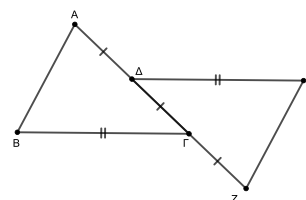
Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές,
- τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα.



5. ΘΕΜΑ_2_13748

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Προεκτείνουμε την ΑΓ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

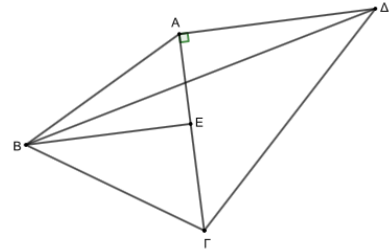
- α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ είναι ίσα,
- β) $AB \parallel EZ$.

6. ΘΕΜΑ_2_12710

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΒΕ. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με υποτεινούσα τη ΓΔ έτσι, ώστε τα σημεία Β και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι:

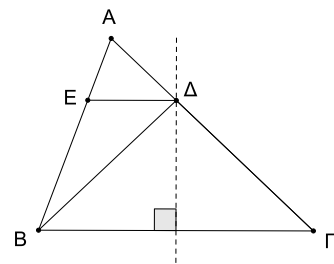
- α) $BE \parallel AD$.
- β) οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι ίσες.
- γ) το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές.



7. ΘΕΜΑ_2_13534

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές,
- β) η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{D}\hat{B}$.



8. ΘΕΜΑ_4_34335

Δίνεται κύκλος (O, R) και μία ευθεία $x'x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ημιευθείας Αx. Αν για κάποιο σημείο Β του κύκλου ισχύει η σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

- α) το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, R) ,
- β) η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx είναι κάθετη στη ΜΟ,
- γ) το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}\hat{M}\hat{x}$.

9. ΘΕΜΑ_4_13843

Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O, R) στα άκρα μιας διαμέτρου του ΑΒ.

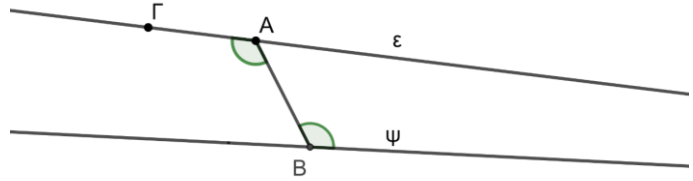
Να αποδείξετε ότι:

- α) οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες.
- β) οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}\hat{A}\hat{x}$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{y}$ τέμνονται σε σημείο Μ.
- γ) το σημείο Μ είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας BAx τέμνει την $y'y$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας AB γ τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ, τότε $M\Gamma = M\Delta$.

10. ΘΕΜΑ_4_13822

Δίνονται οι ευθείες (ϵ) και (ψ).



α) Αν η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι μεγαλύτερη από την $\widehat{A\hat{B}\psi}$:

i. Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{A}\epsilon} + \widehat{A\hat{B}\psi} < 180^\circ$.

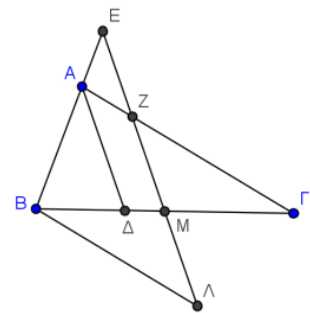
ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ϵ και ψ και γιατί;

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

γ) Αν ισχύει $\widehat{B\hat{A}\Gamma} < \widehat{A\hat{B}\psi}$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ϵ και ψ και γιατί;

11. ΘΕΜΑ_4_1818

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB < AG$, η διχοτόμος του AΔ και ευθεία (ϵ) παράλληλη από το B προς την AG. Από το μέσο M της BΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην AΔ η οποία τέμνει την AG στο σημείο Z, την ευθεία (ϵ) στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι:



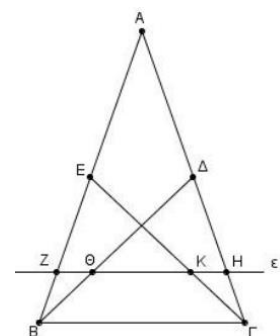
α) τα τρίγωνα AEZ και BΛE είναι ισοσκελή,

β) $B\Lambda = \Gamma Z$,

γ) $AE = AG - B\Lambda$.

12. ΘΕΜΑ_4_1744

Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) φέρουμε τις διαμέσους BΔ και ΓE. Μία ευθεία ϵ , παράλληλη στη βάση BΓ τέμνει τις πλευρές AB και AG στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους BΔ και ΓE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $BZ = \Gamma H$,

β) τα τρίγωνα ZBΘ και HKΓ είναι ίσα,

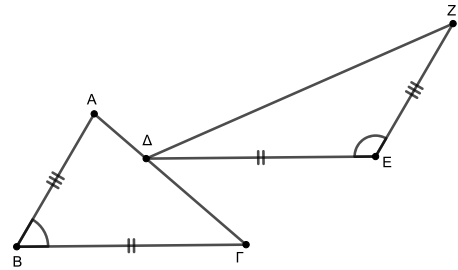
γ) $ZK = H\Theta$.

13. ΘΕΜΑ_4_13752

Σε τρίγωνο ABΓ με $\widehat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AG. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά BΓ και από το σημείο E φέρουμε τμήμα EZ ίσο και παράλληλο με την πλευρά AB, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες $\hat{\Delta}\hat{E}Z$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
2. Οπότε $\hat{\Delta}\hat{E}Z = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$.
3. Τα τρίγωνα ΔEZ και $AB\Gamma$ είναι ίσα.
4. Το τμήμα ΔZ είναι ίσο με το τμήμα $A\Gamma$.



β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς **2.** και **3.**

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\hat{B} < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα $A\Gamma$ και ΔZ για τα διάφορα είδη της γωνίας \hat{B} και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.