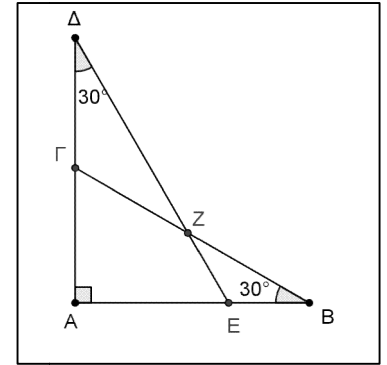


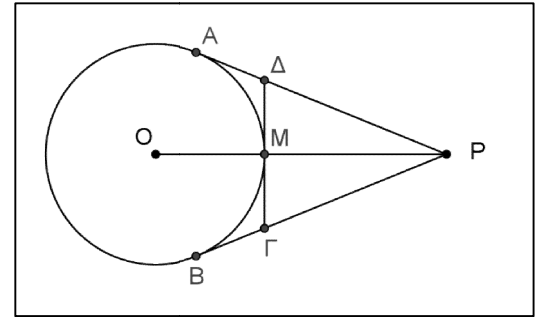
## 4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν – γώνου

1. Στα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$  (γωνία  $\hat{A}$  ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει  $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$  και  $Z$  το σημείο τομής των πλευρών τους  $B\Gamma$  και  $\Delta E$  αντίστοιχα.



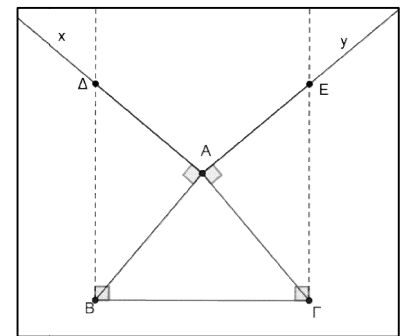
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $AEZ\Gamma$ .
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Gamma Z\Delta$  και  $EBZ$  είναι ισοσκελή.

2. Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και ένα εξωτερικό του σημείο  $P$ , από το οποίο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου  $PA$  και  $PB$ . Έστω ότι το τμήμα  $PO$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $M$  και η εφαπτομένη του κύκλου στο  $M$  τέμνει τα  $PA$  και  $PB$  στα σημεία  $\Delta$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.



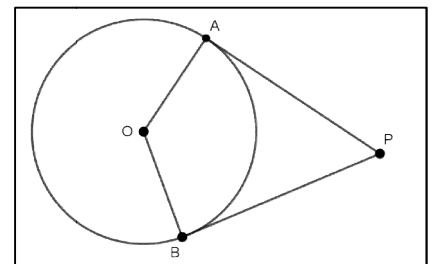
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $P\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- β) Αν η γωνία  $\hat{A}PB$  είναι  $40^\circ$  να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{A}OB$ .

3. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  τέτοιες ώστε  $Ax \perp AB$  και  $Ay \perp A\Gamma$ , όπως στο σχήμα. Οι κάθετες στην πλευρά  $B\Gamma$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  τέμνουν τις  $Ax$  και  $Ay$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.



- α) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .
- β) Αν η γωνία  $\hat{B}A\Gamma$  είναι ίση με  $80^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου που έχει για κορυφές τα σημεία  $A, E$  και  $\Delta$ .

4. Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και ακτίνας  $4\text{ cm}$  και εξωτερικό του σημείο  $P$ . Έστω  $PA, PB$  τα εφαπτόμενα τμήματα που φέρονται από το  $P$ , τα σημεία επαφής τους  $A, B$  με τον κύκλο αντίστοιχα και τέτοια ώστε η γωνία  $\hat{A}PB$  να ισούται με  $60^\circ$ .



α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γωνίας  $\hat{A}\hat{O}B$  είναι ίσο με  $120^\circ$ .

β) Αν  $PO$  η διακεντρική ευθεία του σημείου  $P$ , τότε να υπολογίσετε:

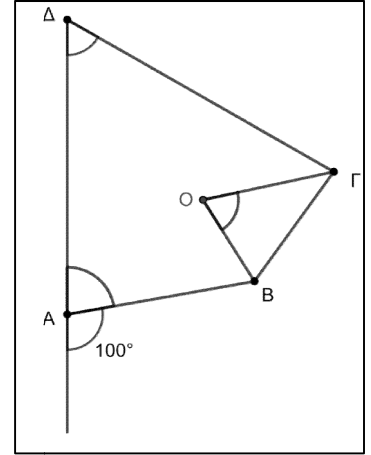
i. το μέτρο της γωνίας  $\hat{A}\hat{P}O$ ,

ii. το μήκος του τμήματος  $OP$ .

5. Θεωρούμε το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος με  $\hat{A}_{εξ} = 100^\circ$  και  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ$ . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  τέμνονται στο  $O$ , τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{\Delta}$  του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ .

β) Να αποδείξετε ότι  $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma} = 70^\circ$ .

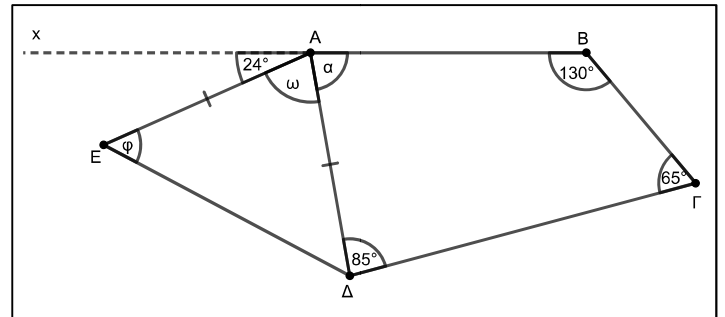


6. Στο παρακάτω σχήμα το  $AB\Gamma\Delta E$  είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος  $A\Delta$  είναι ίση με την πλευρά  $AE$  και η ημιευθεία  $Ax$  είναι προέκταση της  $BA$  προς το  $A$ . Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) τη γωνία  $\hat{\alpha}$ ,

β) τη γωνία  $\hat{\omega}$ ,

γ) τη γωνία  $\hat{\phi}$ ,

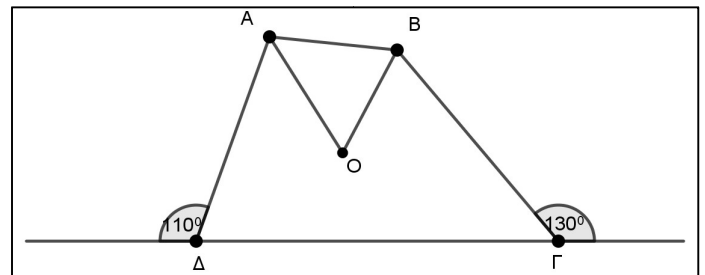


7. Στο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ , η εξωτερική γωνία της  $\hat{\Gamma}$ , ισούται με  $130^\circ$  και η εξωτερική γωνία της  $\hat{\Delta}$ , ισούται με  $110^\circ$ . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  τέμνονται στο  $O$  τότε, να υπολογίσετε:

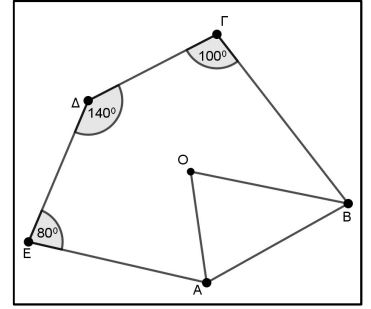
α) τα μέτρα των γωνιών  $\hat{\Gamma}$  και  $\hat{\Delta}$  του τετραπλεύρου.

β) το μέτρο του αθροίσματος  $\hat{A} + \hat{B}$ ,

γ) το μέτρο της γωνίας  $\hat{A}\hat{O}B$ .

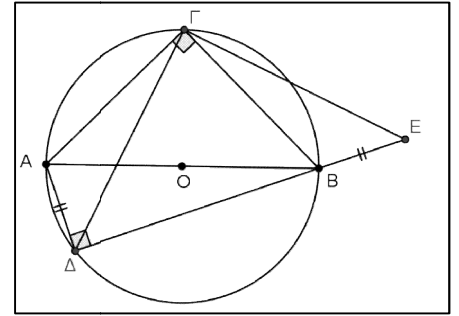


8. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του  $\hat{\Gamma}$  ισούται με  $100^\circ$ , η γωνία του  $\hat{\Delta}$  ισούται με  $140^\circ$  και η γωνία του Ε ισούται με  $80^\circ$  τότε, να υπολογίσετε:



- α) το μέτρο του αθροίσματος  $\hat{A} + \hat{B}$ .  
β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

9. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και διάμετρος του ΑΒ. Έστω Γ το μέσο ενός ημικυκλίου του, Δ τυχαίο σημείο του άλλου ημικυκλίου του και  $\hat{A\Gamma B} = \hat{A\Delta B} = 90^\circ$ . Στην προέκταση της ΔΒ προς το μέρος του Β θεωρούμε σημείο Ε ώστε  $BE = A\Delta$ .



- α) Να αποδείξετε ότι:

- i. οι γωνίες  $\hat{G\Delta A}$  και  $\hat{G\Delta E}$  είναι ίσες,
- ii. τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα,
- iii. η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ.

- β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου.