

1. ΘΕΜΑ_2_37010

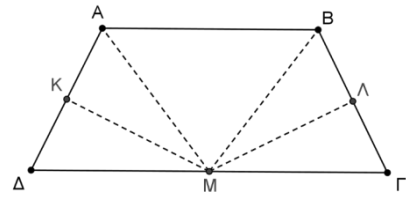
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=8$ και $\Delta\Gamma=12$. Αν AH και $B\Theta$ είναι τα ύψη του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$,

- α) να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$,
β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπέζιου.

2. ΘΕΜΑ_2_36340

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$ και $A\Delta = B\Gamma$), το μέσο M της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα μέσα K και Λ των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

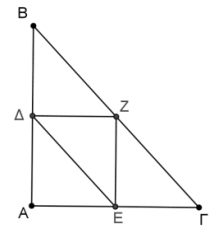
- α) τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα,
β) τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.



3. ΘΕΜΑ_2_36337

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

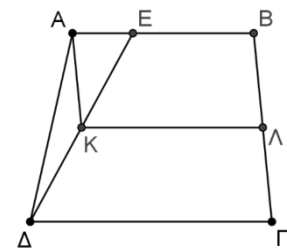
- α) το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι τετράγωνο,
β) το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



4. ΘΕΜΑ_2_36166

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=3$, $\Gamma\Delta=4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE=1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

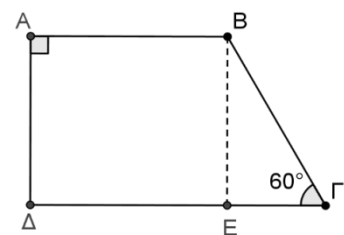
- α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραπέζιου $EB\Gamma\Delta$.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.



5. ΘΕΜΑ_2_36113

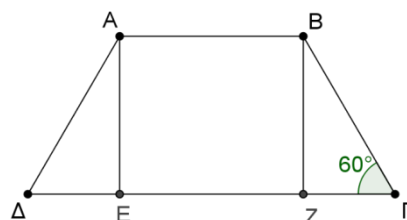
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB = B\Gamma = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Φέρουμε το ύψος BE από τη κορυφή B .

- α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.
β) Να αποδείξετε ότι $2E\Gamma = B\Gamma$.
γ) Αν M, N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$, $B\Gamma$ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος MN .



6. ΘΕΜΑ_2_36112

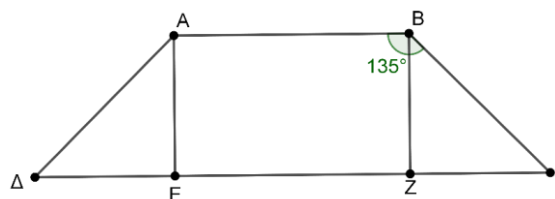
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.



- Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.
- Να αποδείξετε τα τρίγωνα $AE\Delta$, $BZ\Gamma$ είναι ίσα.
- Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.

7. ΘΕΜΑ_2_36106

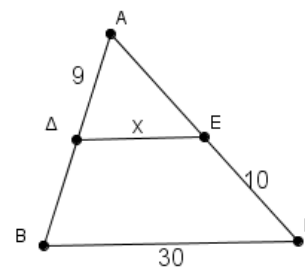
Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .



- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.
- Να αποδείξετε ότι $AE = EA = BZ = \Gamma Z$.

8. ΘΕΜΑ_2_36092

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $A\Delta = 9$, $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$.



- Να υπολογίσετε:
 - το μήκος x του τμήματος ΔE ,
 - την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

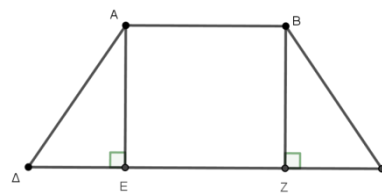
9. ΘΕΜΑ_2_34509

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

- $\Delta Z = \Gamma E$,
- τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή.

10. ΘΕΜΑ_2_34491

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Από τα σημεία A και B φέρνουμε τα κάθετα τμήματα AE και BZ αντίστοιχα στη $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



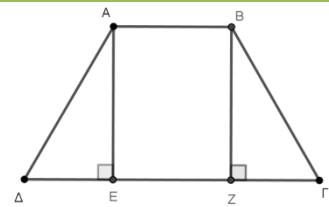
- $\Delta E = \Gamma Z$
- $AZ = BE$

11. ΘΕΜΑ_2_34488

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$ και τα κάθετα τμήματα AE , BZ στη $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

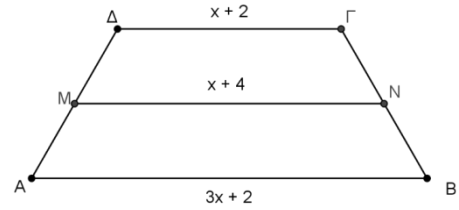
- α) $\Delta E = \Gamma Z$,
- β) το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ορθογώνιο.



12. ΘΕΜΑ_2_34409

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$ και $AD = B\Gamma$), με $AB > \Gamma\Delta$ και MN η διάμεσός του.

- α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.

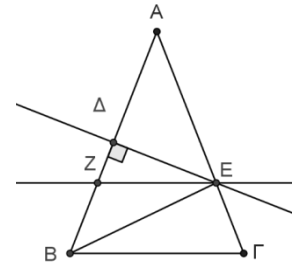


- β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας \hat{B} , να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.

13. ΘΕΜΑ_2_34385

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:

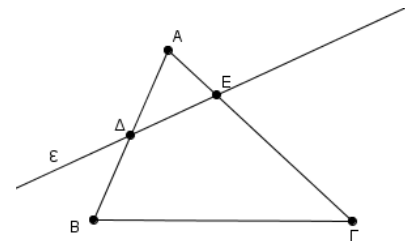
- α) $AE = BE$,
- β) το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



14. ΘΕΜΑ_2_34392

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ϵ) που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία (ϵ) χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ και σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.

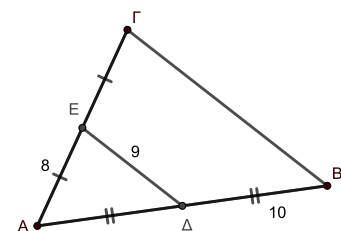
- α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του $AB\Gamma$ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



15. ΘΕΜΑ_2_14877

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $AE = 8$, $E\Delta = 9$, $\Delta B = 10$.

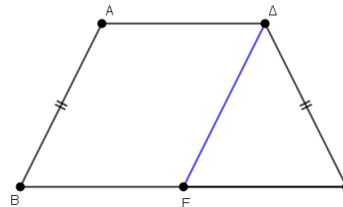
- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.
- β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.
- γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και του τετραπλεύρου $\Delta E\Gamma B$.



16. ΘΕΜΑ_2_13497

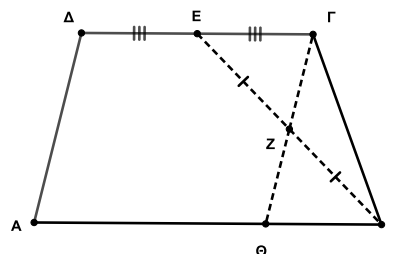
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta // B\Gamma$) με $B\Gamma > \Delta\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι διχοτόμος της $A\hat{\Delta}\Gamma$.
 β) Αν $\hat{A} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

**17. ΘΕΜΑ_2_13824**

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

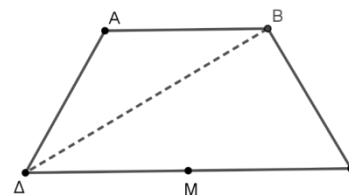
- α) τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα,
 β) $E\Gamma = \Theta B$,
 γ) το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

**18. ΘΕΜΑ_2_37011**

Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\hat{\Delta} = 60^\circ$

και M το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- α) η διαγώνιος ΔB του τραπέζιου είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$,
 β) η BM χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

**19. ΘΕΜΑ_3_12418**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) με $AB > \Gamma\Delta$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο ABE με βάση AB . Αν M είναι το μέσο της βάσης $\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα,
 β) η διάμεσος EM του τριγώνου $E\Delta\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}B$.

20. ΘΕΜΑ_3_12418

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) με $AB > \Gamma\Delta$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο ABE με βάση AB . Αν M είναι το μέσο της βάσης $\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα.
 β) Η διάμεσος EM του τριγώνου $E\Delta\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}B$.

21. ΘΕΜΑ_4_37162

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ , E και Z είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες.

γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες.

22. ΘΕΜΑ_4_37161

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΚΖΕ είναι ισοσκελή.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Ένας μαθητής στην πορεία της λύσης του έδωσε το εξής επιχειρήμα:

«Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε και το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές. Τα τρίγωνα ΑΒΚ, ΑΓΚ έχουν:

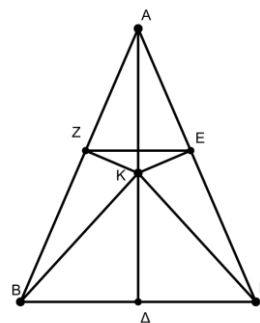
$$1) BK = K\Gamma,$$

$$2) \hat{B}AK = \hat{G}AK \text{ επειδή } AK \text{ διχοτόμος της } \hat{A},$$

$$3) \hat{A}BK = \hat{A}GK \text{ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.}$$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία – Πλευρά – Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία – Πλευρά – Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ.



23. ΘΕΜΑ_4_37139

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στην ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ε και Ζ των ΓΔ, ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

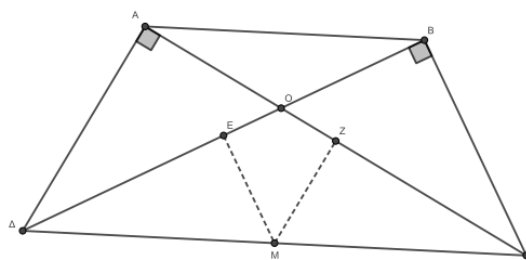
Να αποδείξετε ότι:

α) $ME = MZ,$

β) η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ,

γ) τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα,

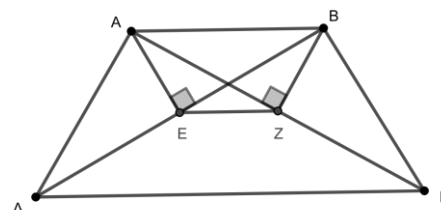
δ) η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.



24. ΘΕΜΑ_4_37135

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD = B\Gamma = AB$. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγωνίες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ



αντίστοιχα ,

β) $AE = BZ$,

γ) το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο,

δ) η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} .

25. ΘΕΜΑ_4_37130

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ και $\hat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Z στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) τέτοιο ώστε $\Gamma Z = B\Gamma$. Αν E είναι σημείο της AB , τέτοιο ώστε $E\Gamma = GB$, να αποδείξετε ότι:

α) η γωνία BEZ είναι ορθή,

β) το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο,

γ) το τετράπλευρο $A\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

26. ΘΕΜΑ_4_37129

Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς ΔA .

Προεκτείνουμε το τμήμα ΔA (προς την πλευρά του A) κατά τμήμα

$$AN = \frac{A\Delta}{2} .$$

Φέρουμε τα τμήματα ΓM και BN και θεωρούμε τα μέσα

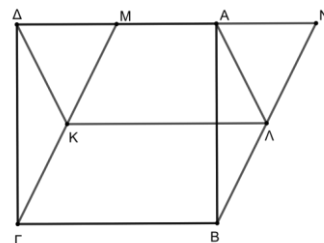
τους K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο,

β) το τετράπλευρο $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο,

γ) το τετράπλευρο $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



27. ΘΕΜΑ_4_37128

Έστω ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και

$$AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} .$$

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας \hat{B} , η

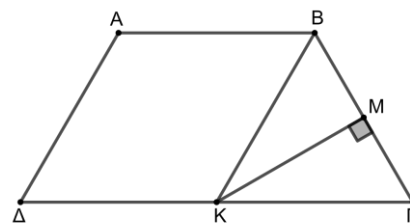
οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς το $B\Gamma$ το τέμνει στο M .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος,

ii. το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$.



28. ΘΕΜΑ_4_37115

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της πλευράς AB παίρνουμε τμήμα $BE = AB$ και στη προέκταση της πλευράς $A\Delta$ τμήμα $\Delta Z = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα ,

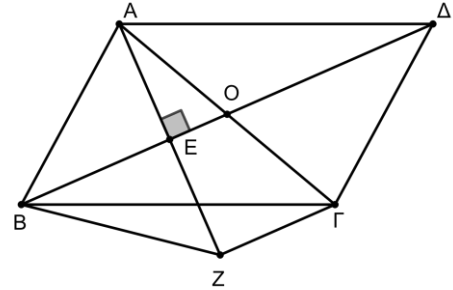
ii. τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά.

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε $ΚΛ // ΔΒ$ και $ΚΛ = \frac{3}{2} ΔΒ$.

29. ΘΕΜΑ_4_37114

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB < AD$ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ. Αν το Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την διαγώνιο ΒΔ και δεν συμπίπτει με το σημείο Γ, τότε να αποδείξετε ότι:

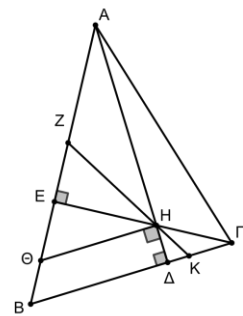
- α) το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές,
- β) $ZΓ = 2OE$,
- γ) το ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



30. ΘΕΜΑ_4_37118

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

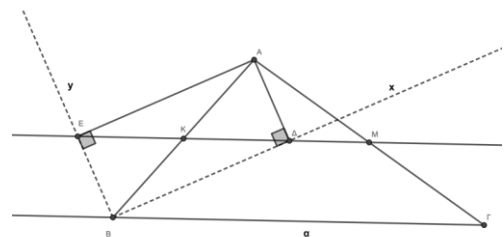
- α) για το τμήμα ΖΕ ισχύει $ZH = 2EZ$,
- β) το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο,
- γ) το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



31. ΘΕΜΑ_4_37107

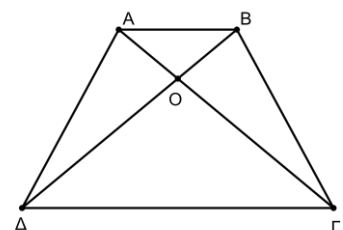
Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος Βx της γωνίας \hat{B} του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας \hat{B} . Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο,
- β) η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ ,
- γ) το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου $\alpha = ΒΓ$.



32. ΘΕΜΑ_4_37103

Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $AD = ΒΓ$, $ΑΓ = ΒΔ$ και $AB < ΓΔ$.



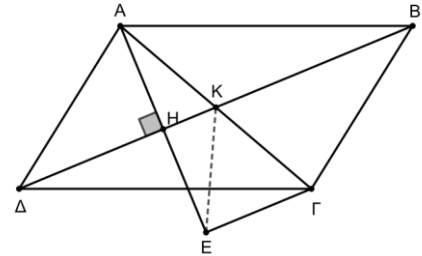
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και ΔΟΓ είναι ισοσκελή.
- β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta\text{A}B} = \hat{\text{A}B\Gamma}$.
- γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\text{AB}\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

33. ΘΕΜΑ_4_37099

Δίνεται παραλληλόγραμμο $\text{AB}\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε AH κάθετη στην BD και στην προέκταση της AH (προς το H) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε: $\text{AH} = \text{HE}$.

Να αποδείξετε ότι:

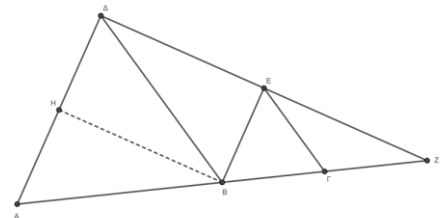
- α) το τρίγωνο AKE είναι ισοσκελές,
- β) το τρίγωνο AEG είναι ορθογώνιο,
- γ) το τετράπλευρο $\text{ΔB}\Gamma\text{E}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



34. ΘΕΜΑ_4_37098

Σε μια ευθεία (ϵ) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία $\text{A}, \text{B}, \Gamma$ έτσι ώστε $\text{AB} = 2\text{B}\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $\text{AB}\Delta$ και $\text{B}\Gamma\text{E}$. Αν H είναι το μέσο του $\text{A}\Delta$ και η ευθεία DE τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο Z να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο $\text{BH}\Delta\text{E}$ είναι ορθογώνιο,
- β) το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές,
- γ) το τετράπλευρο $\text{HE}\Gamma\text{A}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



35. ΘΕΜΑ_4_37089

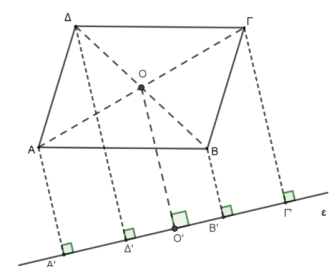
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ ($\hat{\text{A}} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $\text{B}\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\text{DE} \perp \text{B}\Gamma$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $\text{E}\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA . Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές,
- β) τα τρίγωνα $\text{AB}\Gamma$ και BEZ είναι ίσα,
- γ) η ευθεία $\text{B}\Delta$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $\text{Z}\Gamma$,
- δ) το τετράπλευρο $\text{AE}\Gamma\text{Z}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

35. ΘΕΜΑ_4_37086

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $\text{AB}\Gamma\Delta$ και τις προβολές $\text{A}', \text{B}', \Gamma', \Delta'$ και O' των κορυφών του $\text{A}, \text{B}, \Gamma, \Delta$ και του κέντρου του O αντίστοιχα, σε μία ευθεία ϵ .

- α) Αν η ευθεία (ϵ) αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο



ημιεπίπεδο (όπως στο σχήμα) και είναι $AA' = 3$, $BB' = 2$, $ΓΓ' = 5$, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση OO' του κέντρου O του παραλληλογράμμου από την (ε) είναι ίση με 4.
 - ii. Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$.
- β) Αν η ευθεία (ε) διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις AA' , BB' , $ΓΓ'$, $\Delta\Delta'$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

37. ΘΕΜΑ_4_37084

Δίνεται ευθεία (ε) και δυο σημεία A, B εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε) . Φέρουμε AD, BG κάθετες στην (ε) και M, N μέσα των AB και $ΓΔ$ αντίστοιχα.

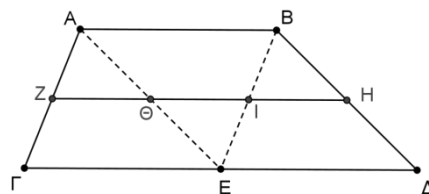
- a) Αν τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) ,
 - i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
 1. $AD < BG$
 2. $AD = BG$
 - ii. να εκφράσετε το τμήμα MN σε σχέση με τα τμήματα AD, BG στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις.
- β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει το τμήμα AB στο μέσο του M , να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $ABΓΔ$ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο), αιτιολογώντας την απάντησή σας.

38. ΘΕΜΑ_4_37080

Σε τραπέζιο $ABΓΔ$ ($AB \parallel ΓΔ$) είναι $ΓΔ = 2AB$. Επίσης, τα σημεία Z, H και E είναι τα μέσα των AD, BG και $ΔΓ$ αντίστοιχα. Ακόμη η ZH τέμνει τις AE, BE στα σημεία Θ, I αντίστοιχα.

- a) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABΓE$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Να δείξετε ότι:

- i. τα σημεία Θ, I είναι μέσα των AE, BE αντίστοιχα,
- ii. $ZH = \frac{3}{2}AB$.



39. ΘΕΜΑ_4_34333

Θεωρούμε τρίγωνο $ABΓ$ με $BΓ = 2AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς $BΓ$ και E το μέσο του τμήματος BA . Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την AG , η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

- a) τα τρίγωνα ABE και $BZ\Delta$ είναι ίσα,
- β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}Γ$,
- γ) το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

40. ΘΕΜΑ_4_34331

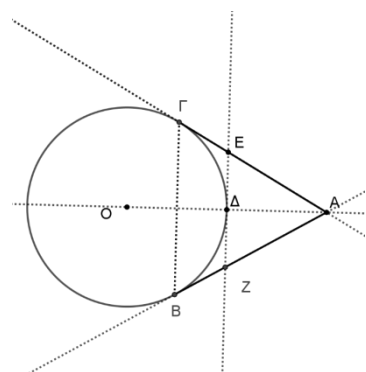
Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) φέρουμε το ύψος AD . Έστω K, Λ, M τα μέσα των $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $K\Lambda // B\Gamma$,
- β) i. $M\Lambda = K\Delta$, ii. Το τετράπλευρο $K\Lambda M\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- γ) Οι γωνίες $\hat{K}\Delta\Lambda$ και $\hat{K}\hat{M}\Lambda$ είναι ίσες.

41. ΘΕΜΑ_4_34324

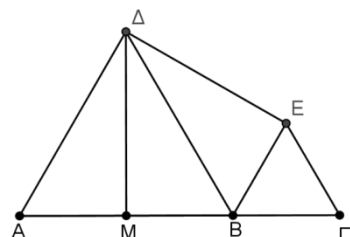
Δίνεται κύκλος κέντρου O και ακτίνας ρ . Από σημείο A εξωτερικό του κύκλου θεωρούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου που εφάπτονται σε αυτόν στα σημεία B, Γ και τέτοιες ώστε, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$ να είναι 60° . Έστω ότι η ευθεία AO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ τέμνει τα τμήματα AB και $A\Gamma$ στα σημεία Z και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α) $OA = 2\rho$,
- β) το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο,
- γ) $AZ = 2ZB$,
- δ) το τετράπλευρο $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

42. ΘΕΜΑ_4_34320

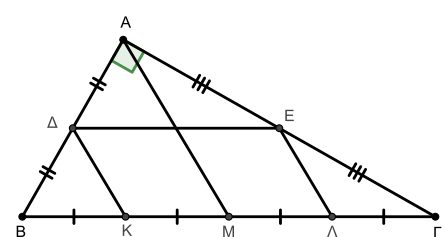
Έστω A, B και Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2B\Gamma$. Θεωρούμε το μέσο M της AB . Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΔAB και $B\epsilon\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



- α) το τετράπλευρο $\Delta\epsilon B\Gamma$ είναι τραπέζιο με βάσεις τα τμήματα $\Delta\Delta$ και $B\epsilon$
- β) τα τρίγωνα ΔMB και $\Delta\epsilon B$ είναι ίσα,
- γ) $\Delta\hat{M}B + \Delta\hat{\epsilon}B = 180^\circ$.

43. ΘΕΜΑ_4_14888

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K, M, Λ ώστε $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



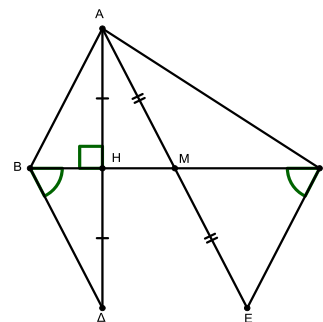
- α) το τετράπλευρο $\Delta\epsilon\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο,
- β) το τετράπλευρο $K\Delta AM$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3}{8}B\Gamma$.

44. ΘΕΜΑ_4_14885

Δίνεται το οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε το ύψος του AH κατά τμήμα $H\Delta = AH$ και τη διάμεσό του AM κατά τμήμα $ME = AM$.

Να αποδείξετε ότι:

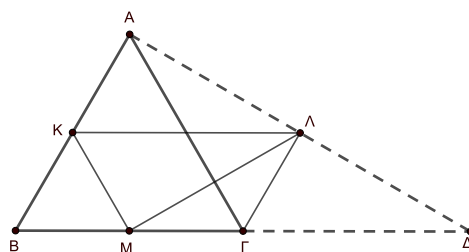
- α) i. $AB = GE$ ii. $AB = B\Delta$
- β) $\hat{B}\Delta = \hat{B}\Gamma E$
- γ) i. Εξετάστε αν το τμήμα $B\Delta$ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα GE .
 ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου $B\Gamma E\Delta$;
 Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



45. ΘΕΜΑ_4_14882

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Αν M, K και Λ είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, AB$ και $A\Delta$ αντίστοιχα τότε:

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $BA\Delta$.
- β) Να αποδείξετε ότι:
- i. το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή,
 ii. το τρίγωνο $KM\Lambda$ είναι ορθογώνιο.



46. ΘΕΜΑ_4_13519

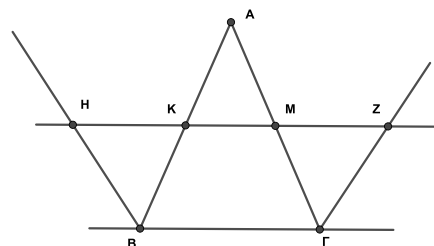
Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$. Στην AB θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = A\Delta$. Από το μέσο M της ΔE φέρουμε παράλληλη προς την $\Delta\Gamma$ που τέμνει την $B\Gamma$ στο K .

- α) Να αποδείξετε $AM \perp \Delta E$.
- β) Να αποδείξετε ότι $2MK = 2AB - A\Delta$.
- γ) Φέρνουμε την EK που τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι $\Gamma Z = AB - A\Delta$.

47. ΘΕΜΑ_4_13838

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), με K, M τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία K και M τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών B και Γ στα σημεία H και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

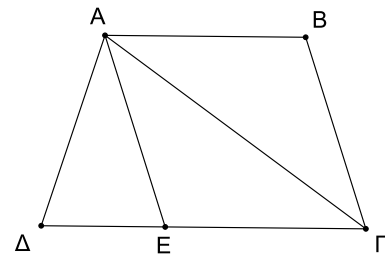
- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

48. ΘΕΜΑ_4_13539

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB // ΓΔ$ και $\hat{A} = 108^\circ$. Στη βάση ΓΔ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε οι ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία \hat{A} .



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

β) Να αποδείξετε ότι:

- i. το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές,
- ii. το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος.

49. ΘΕΜΑ_4_1893

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $AB > ΒΓ$ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60° .

Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.

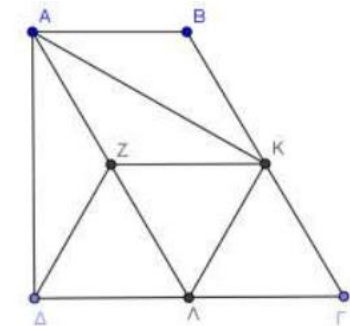
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου, ii. $AM = \frac{1}{4} AG$.

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

50. ΘΕΜΑ_4_1821

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) με $ΒΓ = ΓΔ = 2AB$ και Κ, Λ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΛ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) το Ζ είναι μέσο του ΑΛ,

β) $ΒΓ = 2ΔΖ$,

γ) το τετράπλευρο ΖΚΓΛ είναι ρόμβος,

δ) $\hat{ΑΚΛ} = 90^\circ$.

51. ΘΕΜΑ_4_1815

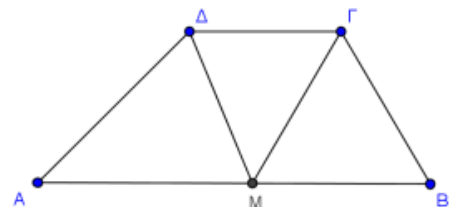
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB // ΓΔ$ και $AB = ΑΔ + ΒΓ$. Αν

η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές,

β) το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές,

γ) η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τραπέζιου.



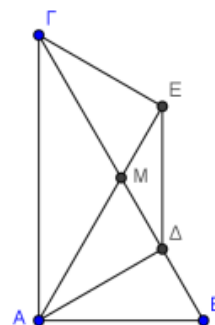
52. ΘΕΜΑ_4_1797

- α) Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda M N$ είναι ρόμβος.
- β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος, το $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

53. ΘΕΜΑ_4_1791

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διάμεσό του AM . Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία AM , η οποία την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

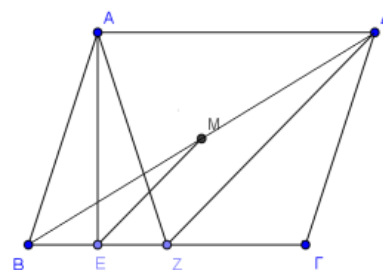
- α) το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο ,
- β) $ME = M\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$,
- γ) το $A\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο .



54. ΘΕΜΑ_4_1790

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με τη γωνία του B να είναι ίση με 70° και το ύψος του AE . Έστω Z σημείο της $B\Gamma$ ώστε $BE = EZ$.

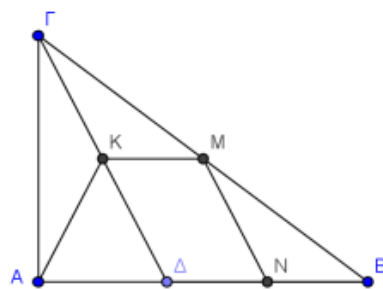
- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου $AZ\Gamma\Delta$.
- γ) Αν M το μέσο του $B\Delta$, να αποδείξετε ότι $EM = \frac{A\Gamma}{2}$.



55. ΘΕΜΑ_4_1789

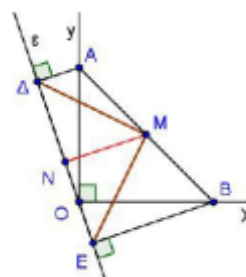
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB . Έστω K, M, N τα μέσα των $\Gamma\Delta, B\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο $KMN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο ,
- β) το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο ,
- γ) η διάμεσος του τραπέζιου $AKMN$ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$.



56. ΘΕΜΑ_4_1778

Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και τα σημεία A και B των ημιευθειών Oy και Ox αντίστοιχα με $OA = OB$. Μια ευθεία (ϵ) η οποία δεν είναι παράλληλη στην AB διέρχεται από το O ώστε τα σημεία A και B να είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο.

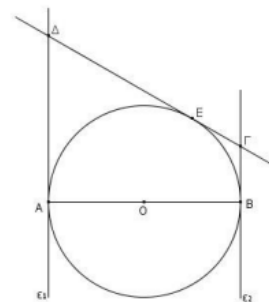


Η κάθετη από το Α στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετη από το Β στην (ε) την τέμνει στο Ε . Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα ,
 β) $ΑΔ + ΒΕ = ΔΕ$.
 γ) $MN = \frac{ΔΕ}{2}$, όπου Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΔΕ αντίστοιχα .
 δ) το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές .

57. ΘΕΜΑ_4_1758

Δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε ευθεία ϵ εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε , η οποία τέμνει τις ϵ_1 και ϵ_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.



- α) Να αποδείξετε ότι $ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ$.
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο .
 γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ανάλογα με τη θέση του σημείου Ε στο ημικύκλιο ΑΒ .

58. ΘΕΜΑ_4_1757

Θεωρούμε τραπέζιο, τέτοιο ώστε $\hat{A} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$, $ΑΒ = \frac{1}{4}ΔΓ$, $ΑΒ = \frac{1}{3}ΑΔ$. Επιπλέον, φέρουμε $ΒΕ \perp ΔΓ$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο.
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
 γ) Αν Κ , Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΚ .

59. ΘΕΜΑ_4_1755

Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($ΑΒ \parallel ΓΔ$) είναι $ΑΒ = ΑΔ$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Lambda}$.
 β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος .
 γ) Αν επιπλέον είναι $Β\hat{\Lambda}Δ = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ .

60. ΘΕΜΑ_4_1747

Δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ και δύο ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 εφαπτομένες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ϵ εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του Ε και τέμνει τις ϵ_1 και ϵ_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:

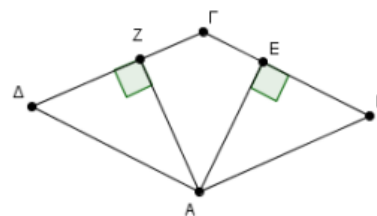
- i. τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο, ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

β) Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

61. ΘΕΜΑ_4_1742

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:

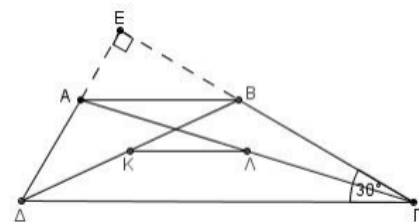
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές.
 β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ZE .
 γ) Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $MN \parallel ZE$ και $ZM = EN$.



62. ΘΕΜΑ_4_1736

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με τη γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και έστω K, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνονται τέμνοντάς τις κάθετα στο σημείο E .

- α) Να αποδείξετε ότι: $AB = 2AE$.
 β) Να αποδείξετε ότι: $K\Lambda = A\Delta$.
 γ) Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



63. ΘΕΜΑ_4_1735

Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε) . Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε) .

- α) Να αποδείξετε ότι $AA' \parallel BB'$.
 β) Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$.
 γ) Να βρείτε τη σχέση της ευθείας AB με την ευθεία (ε) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

64. ΘΕΜΑ_4_1767

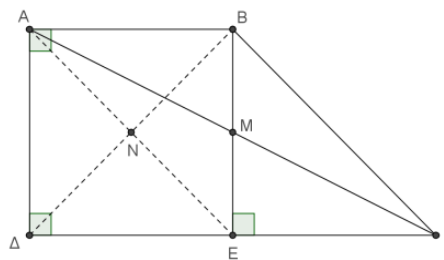
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$

και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$

στο M . Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο $B\Delta$ στο N .

Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{\Gamma} = 45^\circ$,
- το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο,
- $A\Gamma \perp B\Delta$.

**65. ΘΕΜΑ_4_1755**

Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) είναι $AB = A\Delta$.

- Να αποδείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.
- Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ να είναι ρόμβος.
- Αν, επιπλέον, ισχύει ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $EOB\Gamma$.

66. ΘΕΜΑ_4_1747

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτομένες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του E και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

- Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:
 - το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο,
 - $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.
- Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.