

1. ΘΕΜΑ_2_37015

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα,

β) $BM = \frac{AE}{2}$.

2. ΘΕΜΑ_2_37008

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα,

β) το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμα.

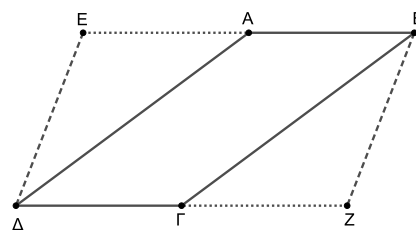
3. ΘΕΜΑ_2_36225

Έστω παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά $\Delta\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήματα

$AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα,

β) το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμα.

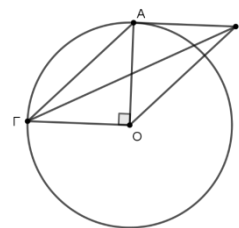


4. ΘΕΜΑ_2_36348

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες $OA, O\Gamma$ και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα AB τέτοιο ώστε $AB = O\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $B\Gamma$ διχοτομούνται.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABO\Gamma$.



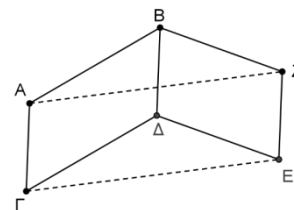
5. ΘΕΜΑ_2_36327

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta E Z$.

Να αποδείξετε ότι:

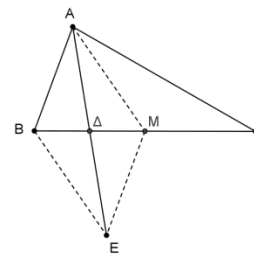
α) το τετράπλευρο $A\Gamma E Z$ είναι παραλληλόγραμμα,

β) $\hat{A}BZ = \hat{\Gamma}\Delta E$.



6. ΘΕΜΑ_2_36164

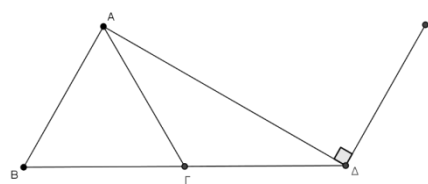
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:



- α) το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο ,
- β) $ME = M\Gamma$.

7. ΘΕΜΑ_2_36115

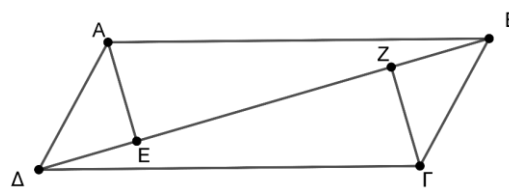
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην $A\Delta$ στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε $\Delta E = B\Gamma$ (τα A και E είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $B\Delta$).



- α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$.
- β) Να αποδείξετε ότι το $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

8. ΘΕΜΑ_2_36105

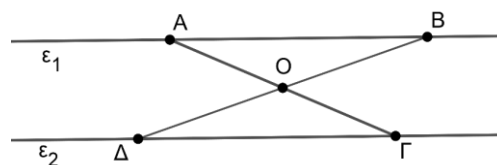
Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ καθέτους στη διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α) $AE = \Gamma Z$,
- β) το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

9. ΘΕΜΑ_2_36096

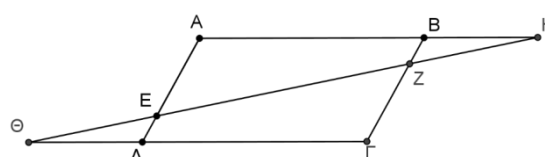
Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 και τα σημεία A, B στην ϵ_1 και Δ και Γ στην ϵ_2 ώστε τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται στο μέσο O του $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι:



- α) τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- β) το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

10. ΘΕΜΑ_2_36090

Στις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$. Αν η ευθεία $Z\Theta$ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία H και Θ , να αποδείξετε ότι:



- α) $\widehat{HBZ} = \widehat{E\Lambda\Theta}$

β) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$

γ) $BH = \Theta\Delta$

11. ΘΕΜΑ_2_36089

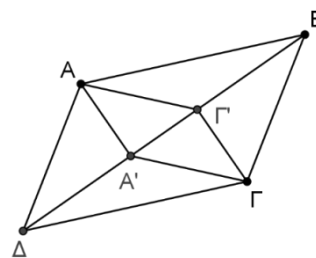
Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών \hat{A} και \hat{B} τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα,
β) το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

12. ΘΕΜΑ_2_34783

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τμήματα AA' , $\Gamma\Gamma'$ κάθετα στη διαγώνιο $B\Delta$ από τις κορυφές A , Γ αντίστοιχα. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

- α) $AA' // \Gamma\Gamma'$,
β) $AA' = \Gamma\Gamma'$,
γ) το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.

**13. ΘΕΜΑ_2_34425**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = ME$. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο,
β) η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM .

14. ΘΕΜΑ_2_34423

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB . Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές,
β) η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} .

15. ΘΕΜΑ_2_34395

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος $O\Gamma$, ώστε $OE = OZ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta E = BZ$,
β) το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

16. ΘΕΜΑ_2_34394

Δίνεται $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας \hat{A} του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

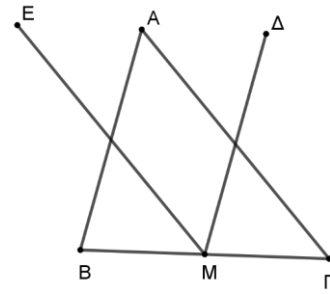
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta ΔΕ$ είναι ισοσκελές.
 β) Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

17. ΘΕΜΑ_2_34391

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$. Από το μέσο M της πλευράς $BΓ$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $MΔ$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά $ΓA$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta A = AE$,
 β) τα σημεία Δ , A και E βρίσκονται στην ίδια ευθεία,
 γ) $\Delta E = BΓ$.



18. ΘΕΜΑ_2_34389

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ και η διαγώνίός του $BΔ$. Από τις κορυφές A και $Γ$ φέρουμε τις κάθετες AE και $ΓZ$ στη $BΔ$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $\Delta ΔΕ$ και ΓBZ είναι ίσα,
 β) το τετράπλευρο $\Delta EΓZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

19. ΘΕΜΑ_2_34388

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και $ΓN$. Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $MΔ = BM$ και την $ΓN$ (προς το N) κατά τμήμα $NE = ΓN$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\Delta Δ // BΓ$ και $\Delta E // BΓ$.
 β) Είναι τα σημεία E , A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

20. ΘΕΜΑ_2_34386

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με $AB = 2BΓ$. Προεκτείνουμε την πλευρά $\Delta Δ$ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $\Delta E = \Delta Δ$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη $\Delta Γ$ στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές,
 β) το $\Delta EΓB$ είναι παραλληλόγραμμο,
 γ) η AH είναι διάμεσος του BAE τριγώνου.

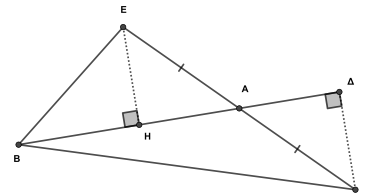
21. ΘΕΜΑ_2_13834

Σε τυχαίο τρίγωνο $ABΓ$ φέρουμε τη διάμεσό του AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $BΓ$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ = BΓ$ και προς το μέρος του $Γ$ κατά τμήμα $ΓH = BΓ$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME = AM$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMZ και EMH είναι ίσα.
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

22. ΘΕΜΑ_2_13833

Στο διπλανό σχήμα το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, το $E\text{H}$ είναι ύψος του τριγώνου ABE και η BA είναι διάμεσος του τριγώνου $BE\Gamma$.



- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $AΕ\text{H}$ είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι $A\text{H} = A\Delta$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Delta E\text{H}$ είναι παραλληλόγραμμο.

23. ΘΕΜΑ_2_13829

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία E και Z των τμημάτων AO και ΓO αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AΕ = \Gamma Z$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AΕ\Delta$ και ΓZB είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E B Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

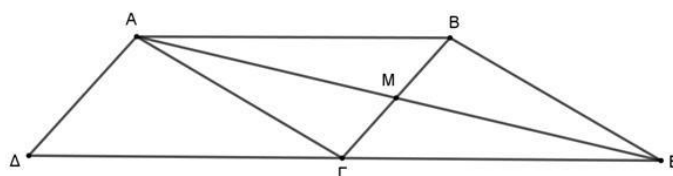
24. ΘΕΜΑ_2_13825

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την BA και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την ΓA (τα σημεία Δ και E βρίσκονται στο ημιέπιεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

- τα τετράπλευρα $A\Delta M B$ και $A\Gamma M E$ είναι παραλληλόγραμμα,
- $\Delta A = A E$.

25. ΘΕΜΑ_2_13816

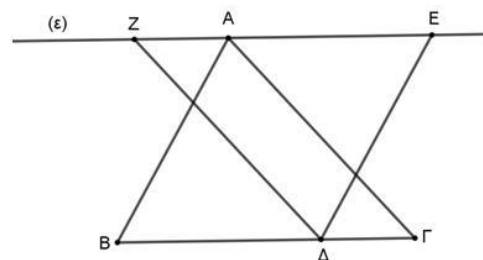
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $A\Delta < AB$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι:



- το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά.

26. ΘΕΜΑ_2_13755

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία (ϵ) παράλληλη προς τη $B\Gamma$. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τις παράλληλες προς την AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ϵ) στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :



- τα τετράπλευρα $ZA\Gamma\Delta$ και $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμα.
- τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E Z$ είναι ίσα.

27. ΘΕΜΑ_3_11897

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της $A\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AM που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E .

Να αποδείξετε ότι:

- $M\Gamma = GE$,
- το τετράπλευρο $AM\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο,
- $\hat{B} + \hat{B\hat{A}M} = \hat{G\hat{E}\Delta}$.

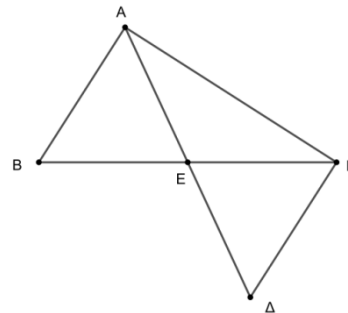
28. ΘΕΜΑ_4_37166

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών A, B, Γ, Δ και E και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό E ισαπέχει από τα χωριά B, Γ και επίσης από τα χωριά A και Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

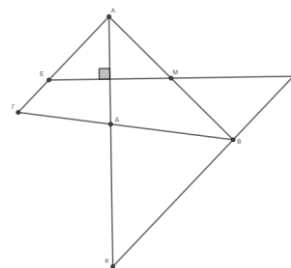
- η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ ,
- αν οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν,
- τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο $A\Delta$.

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου $A\Gamma$ που ισαπέχει από τα χωριά A και Δ .

**29. ΘΕΜΑ_4_37160**

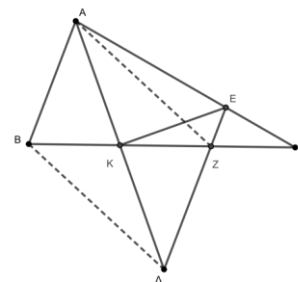
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} και M το μέσον της AB . Η κάθετη από το M στην $A\Delta$ τέμνει το $A\Gamma$ στο E . Η παράλληλη από το B στο $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο K και την προέκταση της EM στο Λ . Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα $AEM, MB\Lambda$ και ABK είναι ισοσκελή,
- το τετράπλευρο $A\Lambda B E$ είναι παραλληλόγραμμο.

**30. ΘΕΜΑ_4_37131**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

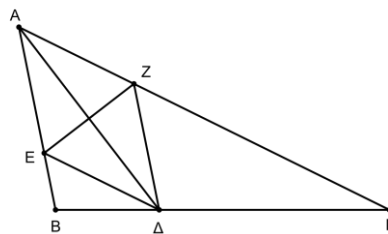
- το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές,
- η EK είναι μεσοκάθετος της $A\Delta$,
- τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα,
- το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.



31. ΘΕΜΑ_4_37117

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει $AD = DG$. Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\hat{B}}$ και η DZ παράλληλη στην AB . Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τμήματα ED και AG είναι παράλληλα,
- β) το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές,
- γ) τα τμήματα AD και EZ διχοτομούνται.

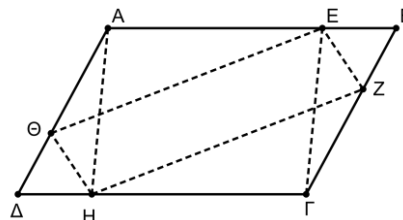


32. ΘΕΜΑ_4_37108

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E, Z, H, Θ στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$.

Να αποδείξετε ότι:

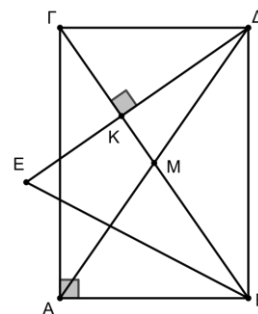
- α) το τετράπλευρο $AEGH$ είναι παραλληλόγραμμο,
- β) το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο,
- γ) τα τμήματα $AG, B\Delta, EH$ και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.



33. ΘΕΜΑ_4_37102

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$). Φέρουμε τη διάμεσο του AM την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του M) κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔK κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας \widehat{B} στο E . Να αποδείξετε ότι:

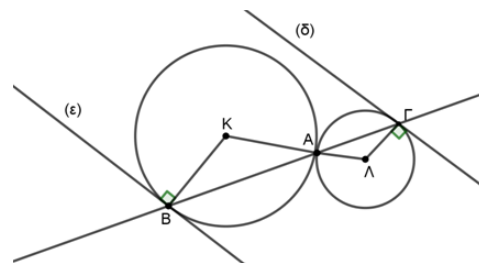
- α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο,
- β) $\widehat{KEB} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$,
- γ) $\Delta E = B\Delta$.



34. ΘΕΜΑ_4_13845

Οι κύκλοι $(K, R), (\Lambda, \rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το A και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία B και Γ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ϵ) και (δ) στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:

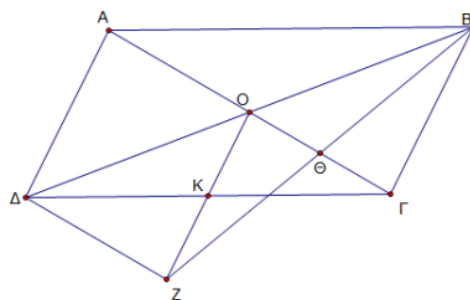
- α) $\widehat{K\hat{B}A} = \widehat{\Lambda\hat{\Gamma}A}$,
- β) $(\epsilon) \parallel (\delta)$,
- γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



35. ΘΕΜΑ_4_1877

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο Θ . Να αποδείξετε ότι:

- τα τμήματα OG και BZ διχοτομούνται,
- $AO = \Delta Z$,
- τα τρίγωνα AOB και $\Delta Z\Gamma$ είναι ίσα.



36. ΘΕΜΑ_4_1810

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M του $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο με το BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο με το ΓA (τα σημεία Δ και E είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από το $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

- τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά,
- η περίμετρος του τριγώνου $M\Delta E$ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

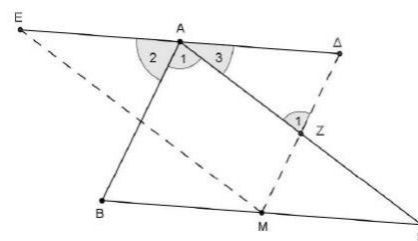
γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

« $\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των $AB//M\Delta$ που τέμνονται από AZ), $A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη των $AB//M\Delta$ που τέμνονται από ΔE). Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta Z$).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$.

Οπότε τα σημεία Δ, E και A είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;



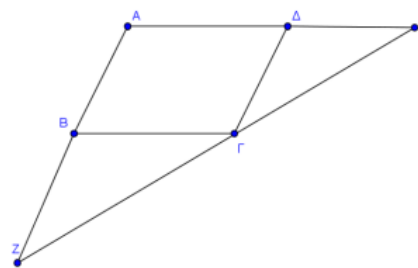
37. ΘΕΜΑ_4_1805

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στην προέκταση της $A\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στην προέκταση της AB θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$.

- Να αποδείξετε ότι: i. $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$, ii. τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.
- Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό:

«Έχουμε: $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη ZE) και $B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$).

Όμως $\Delta\hat{\Gamma}E + \Gamma\hat{\Delta}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta E\Gamma$). Άρα, σύμφωνα με τα



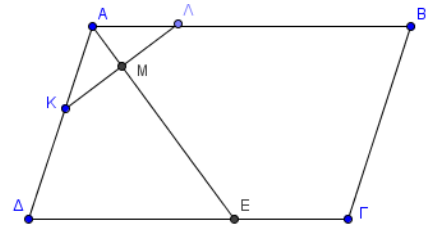
προηγούμενα ισχύει ότι: $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{E} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{Z} = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Z, Γ και E είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

38. ΘΕΜΑ_4_1785

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $AB > AD$. Θεωρούμε σημεία K, Λ των AD και AB αντίστοιχα ώστε $AK = AL$. Έστω M το μέσο του KΛ και η προέκταση του AM (προς το M) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι:

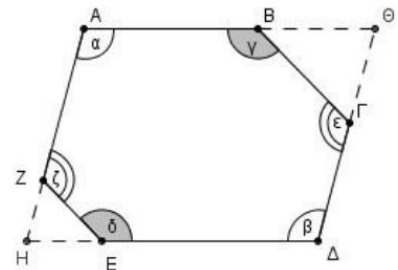
- $AD = DE$,
- $B\Gamma + \Gamma E = AB$,
- $\hat{B} = 2\hat{A}\hat{\Lambda}K$.



39. ΘΕΜΑ_4_1746

Στο κυρτό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.

- Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$.
- Αν οι πλευρές AZ και ΔE προεκτεινόμενες τέμνονται στο H και οι πλευρές AB και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:
 - οι γωνίες \hat{A} και \hat{H} είναι παραπληρωματικές,
 - το τετράπλευρο $A\Theta\Delta H$ είναι παραλληλόγραμμο.



40. ΘΕΜΑ_4_1731

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και ΓΔ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύει ότι $AB > AD$ και η γωνία \hat{A} είναι αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΔDE και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΔDE και $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελή.

- Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
- Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

41. ΘΕΜΑ_4_1730

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και ΓΔ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύει $AB > AD$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και \hat{B} .

- α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

42. ΘΕΜΑ_4_1709

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{\Gamma}_{εξ}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας \hat{A} .

Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αx // ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ). Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ,
β) η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{εξ}$,
γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

43. ΘΕΜΑ_4_13742

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε $ΒΚ \perp ΒΓ$ έτσι ώστε $ΒΚ = ΑΓ$ (το σημείο Κ είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α).

- α) Να αποδείξετε ότι $ΑΜ // ΒΚ$ και $ΑΒ = ΒΚ$.
β) Να δείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}\hat{A}\hat{M}$.
γ) Να αποδείξετε ότι $\hat{B}\hat{K}\hat{A} = 45^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.
δ) Μπορεί το τετράπλευρο ΑΒΚΜ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.