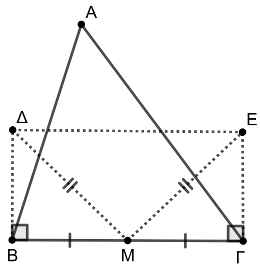
1. **ΘΕΜΑ_2_36339**

Στο σχήμα που ακολουθεί, το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, και τα τμήματα ΒΔ και ΕΓ είναι κάθετα στη ΒΓ στα σημεία Β, Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$. Να αποδείξετε ότι:



α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα,

β) το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

2. **ΘΕΜΑ_2_36353**

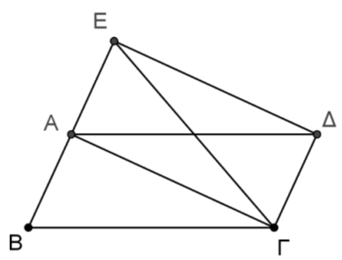
Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ φέρουμε δυο διαμέτρους του ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες,

β) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Γ, Β και Δ είναι ορθογώνιο.

3. **ΘΕΜΑ_2_36175**

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.



Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ,

β) το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές,

γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$.

4. **ΘΕΜΑ_2_34781**

Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε τα μέσα Μ και Ν των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

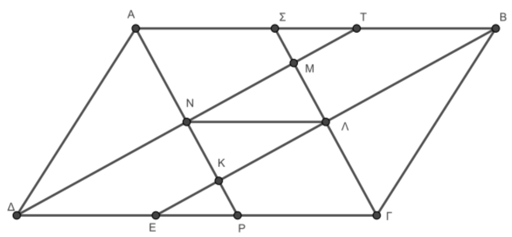
Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta = M\Gamma$.

β) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Μ και Ν είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ.

5. **ΘΕΜΑ_4_37167**

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > A\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ, Ε στην ΔΓ και Σ, Τ στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:



α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο,

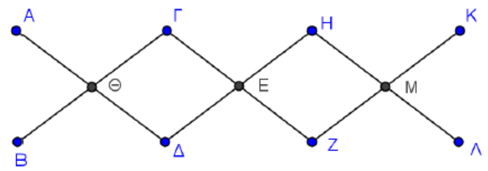
β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο,

γ) $\Lambda N // AB$,

δ) $\Lambda N = AB - A\Delta$.

6. **ΘΕΜΑ_4_37083**

Στη διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:



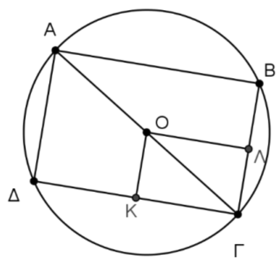
α) το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο,

β) τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά,

γ) το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

7. **ΘΕΜΑ_4_34326**

Έστω κύκλος κέντρου Ο και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε δυο ίσες χορδές ΑΔ, ΒΓ και χορδές ΔΓ, ΑΒ τέτοιες ώστε να είναι κάθετες στις ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι:

α) οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες,

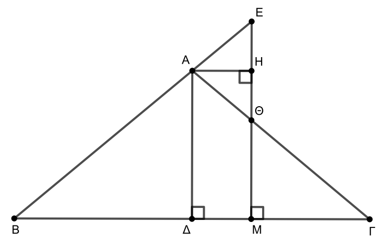
β) το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,

γ) η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου,

δ) το τετράπλευρο ΟΚΓΛ είναι ορθογώνιο.

8. **ΘΕΜΑ_4_14887**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$, και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το σημείο Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) $Δ\hat{Α}Η = 90°$,

β) το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές,

γ) $ΜΘ + ΜΕ = 2ΑΔ$.

9. **ΘΕΜΑ_4_13699**

Δίνονται δυο κύκλοι $(Κ,ρ_1)$ και $(Λ,ρ_2)$ που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Έστω ότι μια ευθεία $(ε)$ εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη $(ζ)$ των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία $(ε)$ σε σημείο Μ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες ΚΒ και ΛΜ τέμνονται σε σημείο, έστω Δ ,

ii. το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

β) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

10. ΘΕΜΑ_4_13746

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΔ προς το Δ παίρνουμε σημείο Ε, έτσι ώστε $ΑΔ = ΑΕ$.

α) Να αποδείξετε ότι :

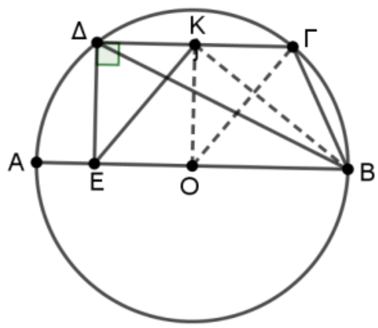
i. τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ είναι ίσα.

ii. η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ που την περιέχουν.

β) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ το διπλάσιο της διαμέσου ΑΔ ισούται με την πλευρά ΒΓ, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου ΑΒΕΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

11. ΘΕΜΑ_4_1879

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο $ΑΒ$. Φέρνουμε χορδή $ΓΔ // ΑΒ$ με $Κ$ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη $ΔΓ$.



Να αποδείξετε:

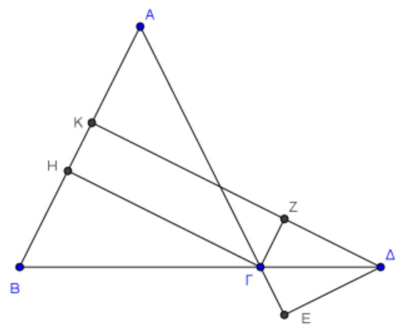
α) το τετράπλευρο $ΚΓΟΕ$ είναι παραλληλόγραμμο,

β) $Δ\hat{Ε}Κ = \dfrac{Δ\hat{Ο}Γ}{2}$,

γ) $ΚΕ < ΚΒ$.

12. ΘΕΜΑ_4_1816

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην $ΚΔ$. Να αποδείξετε ότι:



α) η γωνία $Ζ\hat{Γ}Δ$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{Β}$,

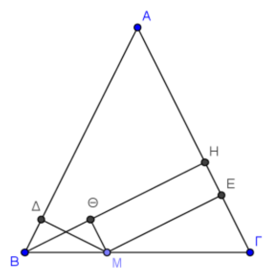
β) η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Ζ\hat{Γ}Ε$,

γ) το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές ,

δ) $ΔΚ - ΔΕ = ΗΓ$.

13. ΘΕΜΑ_4_1800

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$, τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του $ΒΗ$. Από το Μ φέρουμε κάθετες $ΜΔ$, $ΜΕ$ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



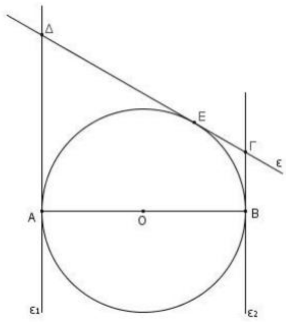
α) το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο ,

β) $B\Theta = \Delta M$,

γ) $M\Delta + ME = BH$.

14. ΘΕΜΑ_4_1758

Δίνεται κύκλος (O,R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτομένες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε ευθεία ε, εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ανάλογα με τη θέση του σημείου Ε στο ημικύκλιο ΑΒ .

15. ΘΕΜΑ_4_1733

Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2, να αποδείξετε ότι:

i. $OM = OM_1$,

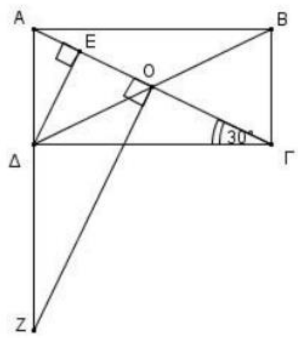
ii. τα σημεία Μ , Ο και M_2 είναι συνευθειακά,

iii. το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

16. ΘΕΜΑ_4_1729

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\Delta\hat{\Gamma}A = 30°$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.



α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες .

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο, η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα .

17. ΘΕΜΑ_4_1735

Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε) .

α) Να αποδείξετε ότι $AA' // BB'$.

β) Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο K, να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$.

γ) Να βρείτε τη σχέση της ευθείας AB με την ευθεία (ε) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.