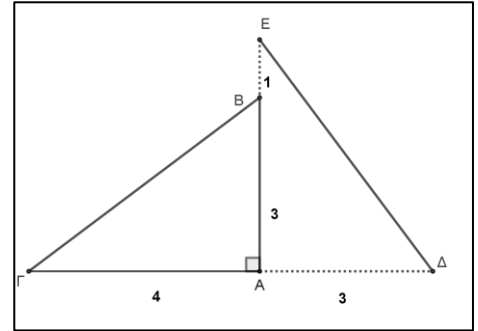


3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΑΓ$ με $\widehat{ΒΑΓ} = 90^\circ$ είναι $ΒΑ = 3$ και $ΑΓ = 4$. Προεκτείνουμε την πλευρά $ΓΑ$ (προς το μέρος του A) και παίρνουμε τμήμα $ΑΔ = 3$ και την πλευρά $ΑΒ$ (προς το μέρος του B) κατά τμήμα $ΒΕ = 1$.



- α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τρίγωνο $ΔΑΕ$ είναι ορθογώνιο. Είναι ο ισχυρισμός του σωστός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $ΒΑΓ$ και $ΔΑΕ$ είναι ίσα.

- γ) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις με τις ίσες γωνίες που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ του β) ερωτήματος.

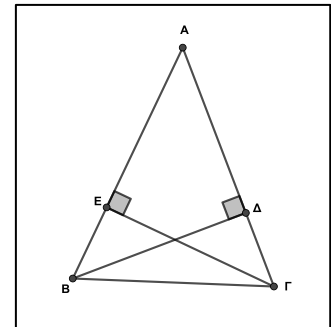
- Η γωνία $\widehat{ΒΓΑ}$ του τριγώνου $ΒΑΓ$ είναι ίση με τη γωνία του τριγώνου $ΔΑΕ$.
- Η γωνία $\widehat{ΑΔΕ}$ του τριγώνου $ΔΑΕ$ είναι ίση με τη γωνία του τριγώνου $ΒΑΓ$.
-

2. Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) φέρνουμε τα ύψη του $ΒΔ$ και $ΓΕ$.

- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $ΒΓΔ$ και $ΒΓΕ$.

- β) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα $ΒΕ$ και $ΓΔ$ είναι ίσα.

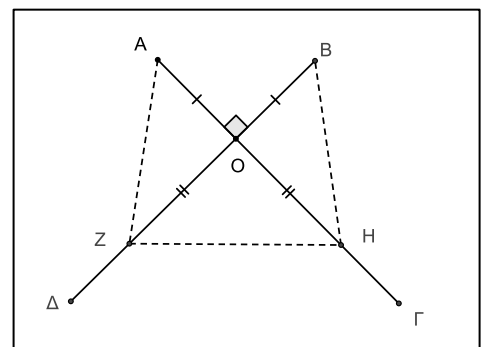
- γ) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα $ΑΕ$ και $ΑΔ$ είναι ίσα.



3. Στο σχήμα, τα τμήματα $ΑΓ$ και $ΒΔ$ τέμνονται κάθετα στο σημείο O έτσι ώστε $ΟΑ = ΟΒ$. Πάνω στα τμήματα $ΟΓ$ και $ΟΔ$ θεωρούμε τα σημεία H και Z αντίστοιχα τέτοια ώστε $ΟΗ = ΟΖ$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΟΑΖ$ και $ΟΒΗ$ είναι ίσα.

- β) Δύο από τις παρακάτω τέσσερις ισότητες προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων $ΟΑΖ$ και $ΟΒΗ$ του α) ερωτήματος. Να βρείτε ποιες ισότητες είναι και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



1. $Ο\hat{Α}Ζ = Ο\hat{Β}Η$
2. $Α\hat{Ο}Β = Ζ\hat{Ο}Η$
3. $ΑΖ = ΒΗ$
4. $ΑΗ = ΒΖ$

γ) Τι θα αλλάζατε ή θα προσθέτατε στα δεδομένα ώστε να προκύπτει ως συμπέρασμα ότι το τμήμα ZH είναι ίσο με τα τμήματα AZ και BH ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του $A\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του AB προς το B και $A\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε σημεία E και Z αντίστοιχα ώστε $BE = \Gamma Z$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\Delta\Lambda} = \widehat{\Gamma\Delta\Lambda}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\epsilon\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.

γ) Αν ΔK είναι το ύψος του τριγώνου $E\Delta Z$, να αποδείξετε ότι $EK = KZ$.

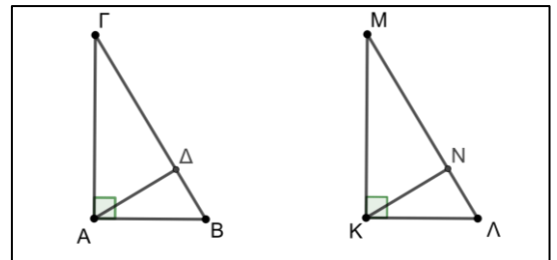
5. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ είναι ορθογώνια με $\hat{A} = \hat{K} = 90^\circ$ και $A\Gamma = KM$, $B\Gamma = \Lambda M$. Επίσης τα $A\Delta$ και KN είναι ύψη των τριγώνων:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ είναι ίσα

β) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = KN$.

γ) Ποιο συμπέρασμα βγαίνει από το β) για τα μήκη των αντίστοιχων υψών ίσων ορθογώνιων, όπως τα $A\Delta$ και KN ;

δ) Να σχεδιάσετε τα ύψη ΔE και NP των τριγώνων $A\Delta B$ και $KN\Lambda$ και να αποδείξετε ότι είναι ίσα.

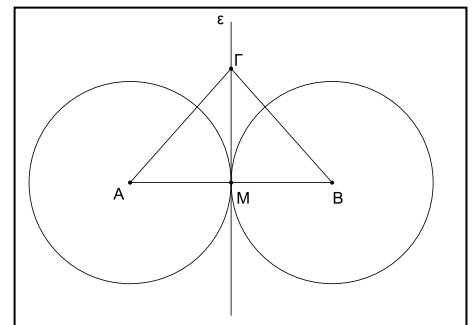


6. Δύο ίσοι κύκλοι (A, ρ) και (B, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M . Στην κοινή εφαπτομένη ϵ των κύκλων στο σημείο M παίρνουμε ένα σημείο Γ , διαφορετικό του M .

α) Πόσων μοιρών είναι η γωνία $A\hat{M}B$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = B\Gamma$.

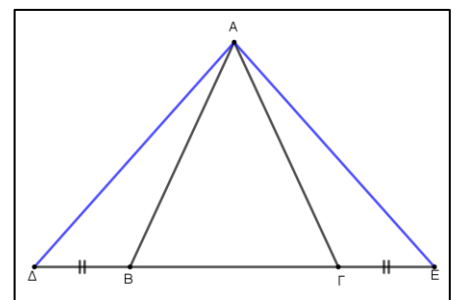
γ) Πόσων μοιρών πρέπει να είναι η γωνία $M\hat{A}\Gamma$, ώστε η $A\Gamma$ να είναι κάθετη στη $B\Gamma$;



7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δύο άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$ όπως στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$,

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.



γ) Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι τα τρία τρίγωνα $AB\Gamma$, $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή A . Συμφωνείτε ή όχι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας

\hat{B} . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA (προς το A). Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \Delta E$ και $AB = EB$,

β) $\Delta Z = \Delta\Gamma$,

γ) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και EBZ είναι ίσα.

