

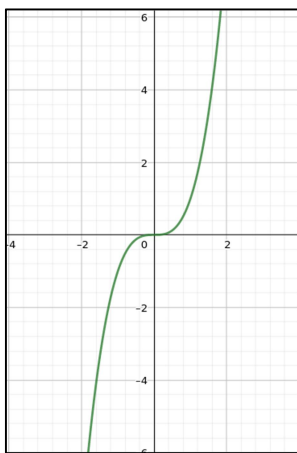
2.1 Μονοτονία – ακρότατα – συμμετρίες συνάρτησης

1. Δίνεται το σημείο $A(-2,8)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης f .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός ακόμα σημείου, το οποίο να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

β) Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

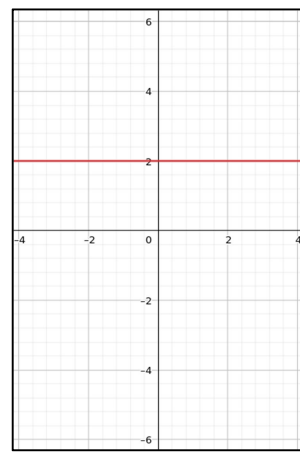
γ) Αν μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση f να αιτιολογήσετε ποια μπορεί να είναι:



Γραφική παράσταση (α)



Γραφική παράσταση (β)

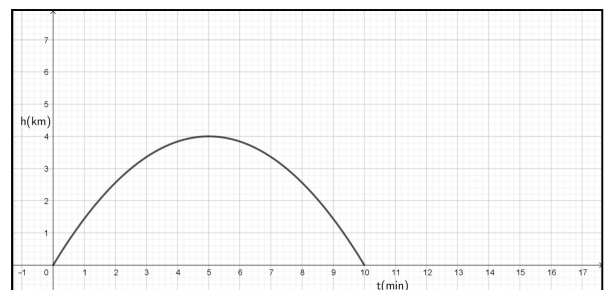


Γραφική παράσταση (γ)

2. Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

α) Να βρείτε:

- i. τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου,
- ii. το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.



β) Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος 1 Km .

- i. Να μεταφέρεται στην κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη.
- ii. Το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

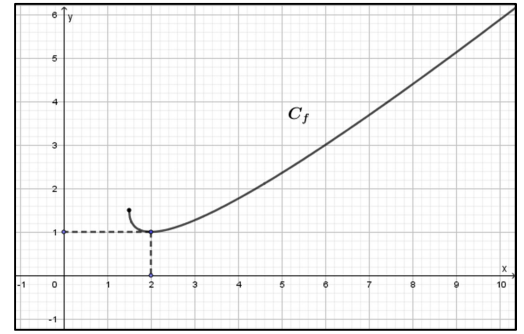
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{2x - 3}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού. γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι

i. Γνησίως φθίνουσα ,

ii. Γνησίως αύξουσα



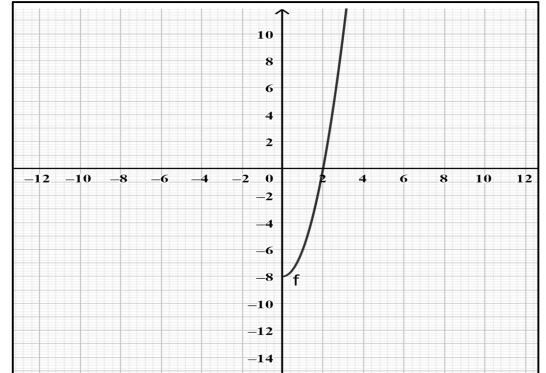
4. Στο σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε:

i. τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f ,

ii. το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει .

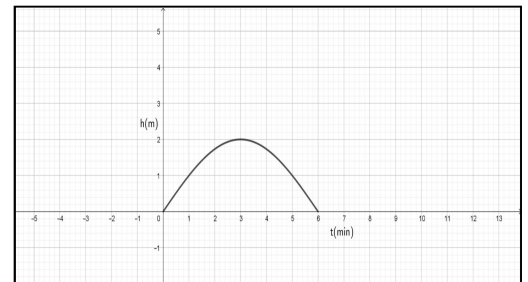


5. Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t . Να βρείτε:

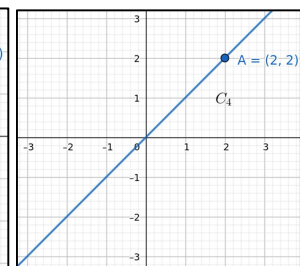
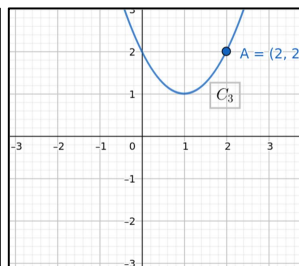
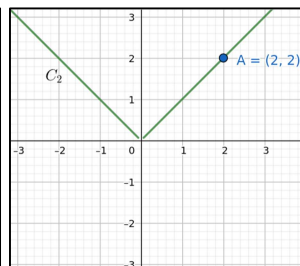
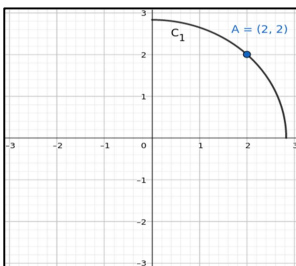
α) Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1 m από το έδαφος.

β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει.

γ) Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος.



6. Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.

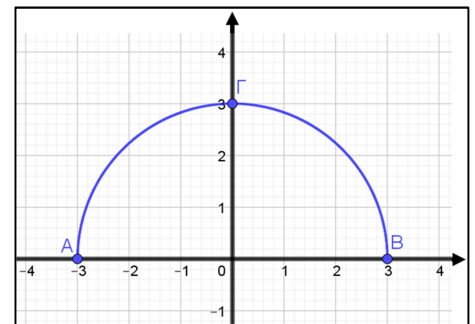
β) Για τις συναρτήσεις C_2 , C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2,k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμιάς συνάρτησης.

7. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων.

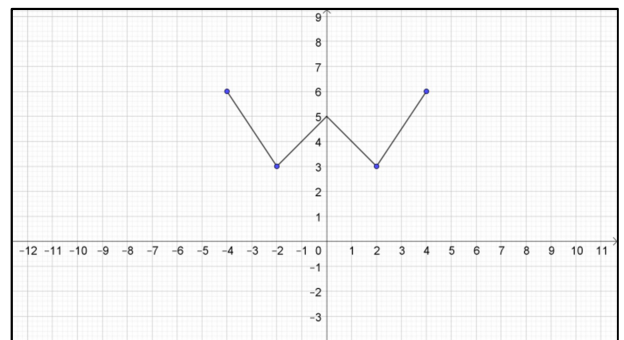


8. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[-4, 4]$ φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει.



9. Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(-1)=2$ και $f(1)=0$.

Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά):

α) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια.

β) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή.

γ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

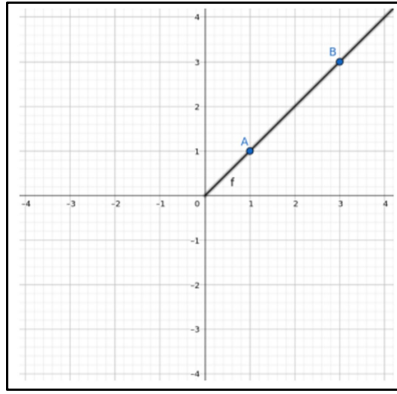
10. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$, $B(3,3)$.

α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B .

i. είναι σταθερή συνάρτηση

ii. είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία διέρχεται από τα A , B και είναι περιττή.



11. Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} με σύνολο τιμών το \mathbb{R} της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$.

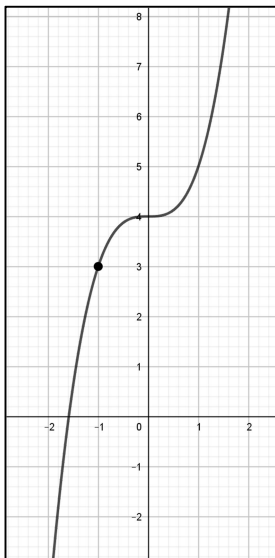
α) Θα μπορούσε η γραφική παράστασή της να διέρχεται και από το σημείο $B(2,5)$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

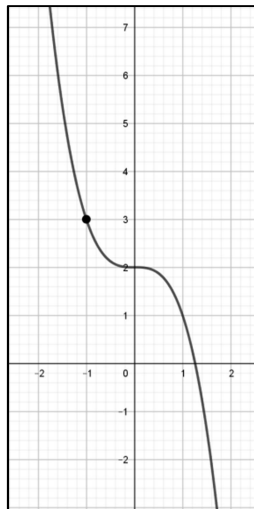
β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

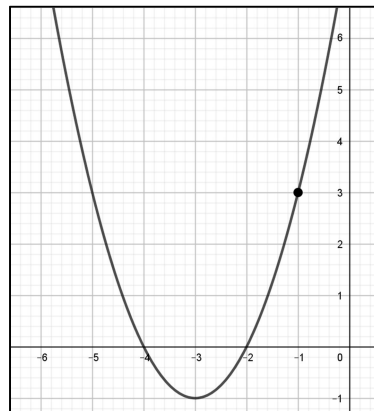
i.



ii.



iii.



12. Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} με σύνολο τιμών το \mathbb{R} της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

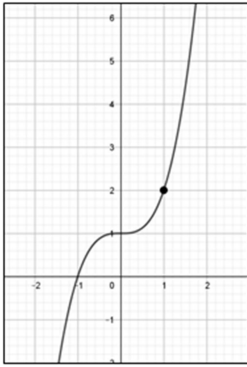
α) Θα μπορούσε η γραφική παράστασή της να διέρχεται και από το σημείο $B(2,9)$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

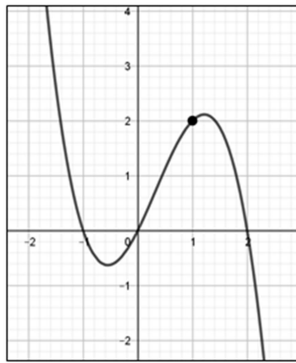
β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

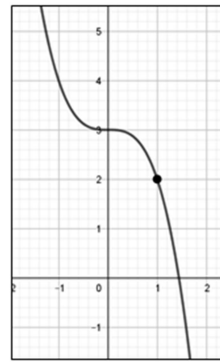
i.



ii.



iii.

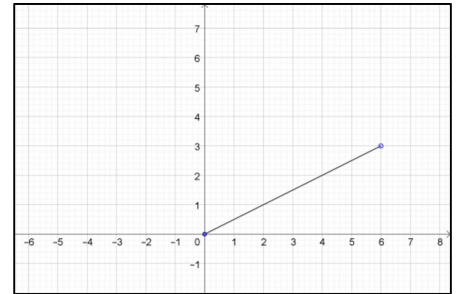


13. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

β) Να βρείτε το $f(-4)$.

- γ) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

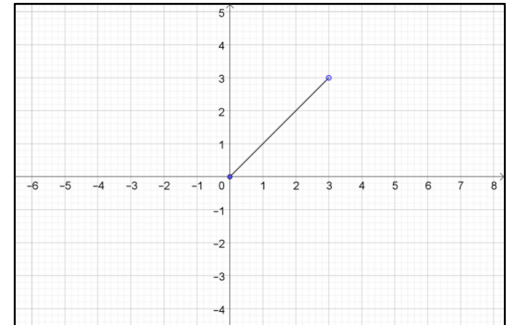


14. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

β) Να βρείτε το $f(-2)$.

- γ) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

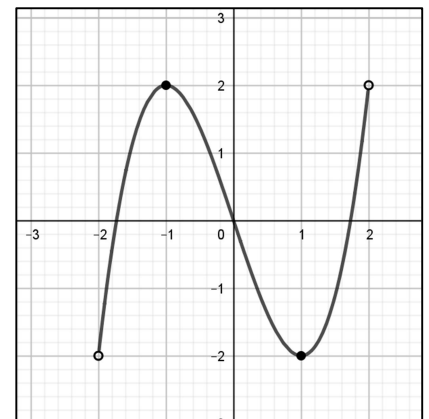


15. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράστασιμιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2, 2)$.

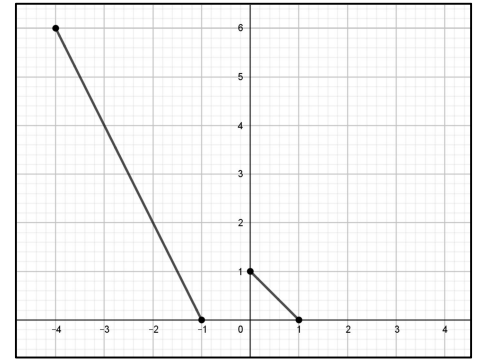
α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

- γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.



16. Στο σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .

β) Να βρείτε:

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

17. Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f .

Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

β. $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$

γ. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

δ. $f(x) = -\sqrt{x^2 - 9}$