

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sigma\upsilon\nu 2x$					
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$					

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης f ;

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

3. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu(180^\circ - 20^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(-3x)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - 20^\circ)}$.

α) Να δείξετε ότι $A = \sigma\upsilon\nu 3x$.

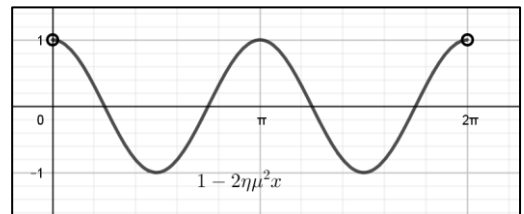
β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή και την περίοδο της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$.

4. Δίνεται η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$.

β) Να δείξετε ότι $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$.

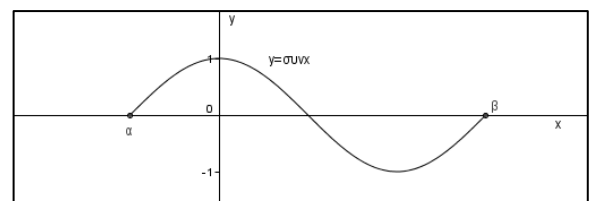
γ) Με χρήση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta\mu^2 x$ και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$.



5. Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\sigma\upsilon\nu x$.

α) Να βρείτε τα a και β .

β) Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετα-



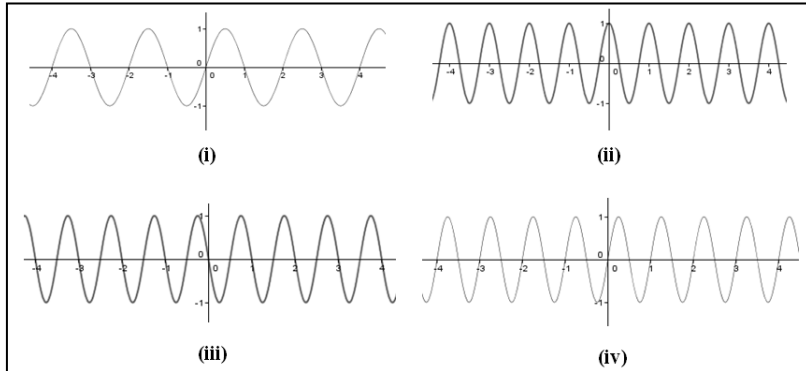
τοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπέσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\eta\mu\chi$;

6. Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu(2\pi x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T=1$.

β) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

γ) Μία από τις παρακάτω τέσσερεις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής.

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = -2\eta\mu x$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

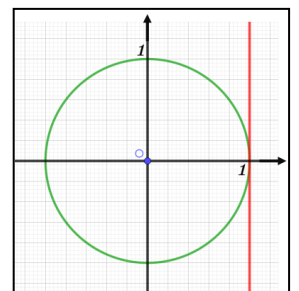
β) i. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.



10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$,

ii. $f(x) = 4\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4\eta\mu x$ όταν $x \in [0, 2\pi]$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g .

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$f(x) = \eta\mu 2x$					

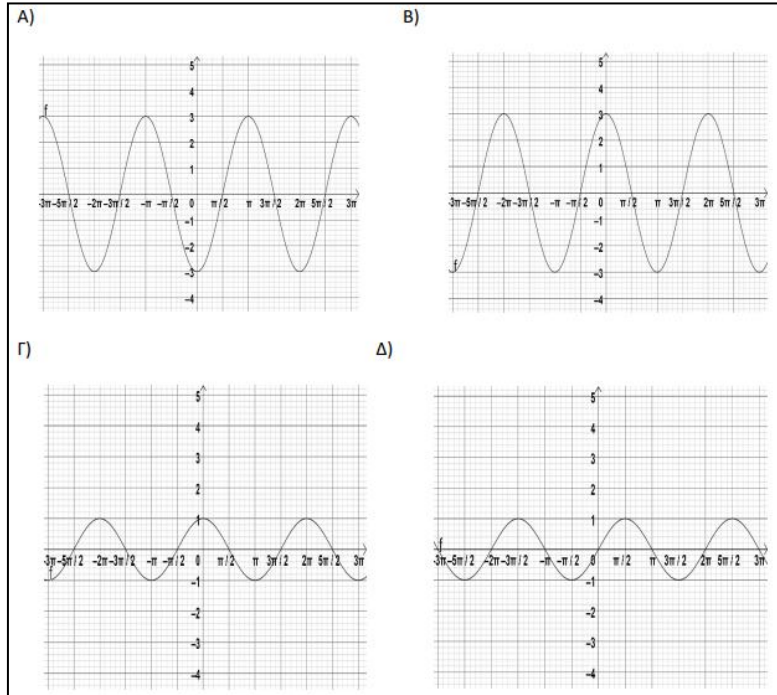
ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

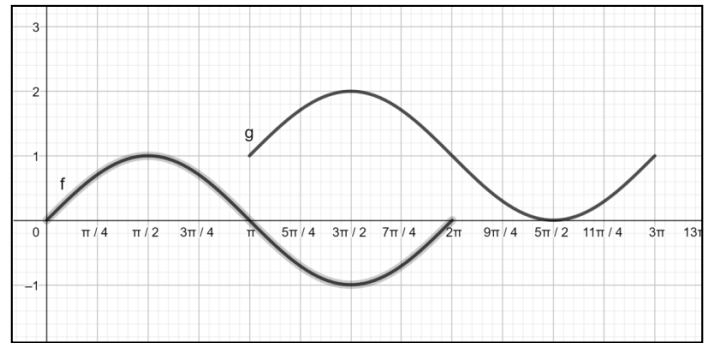
α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



14. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις. Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

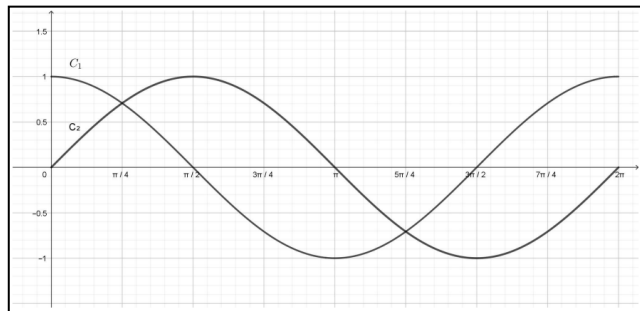


α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά.

β) i. τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g .

ii. τον τύπο της g .

15. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0, 2\pi]$.



α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\eta x$ και $g(x) = \eta\mu x$ για $x \in [0, 2\pi]$, ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\eta x$ και ποια της $g(x) = \eta\mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

16. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της.

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$.

17. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

β) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x)$ στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και την μονοτονία της συνάρτησης $f(x)$ στο

$$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

γ) Με την βοήθεια του ερωτήματος β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να συγκρίνετε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς:

i. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

ii. $\eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

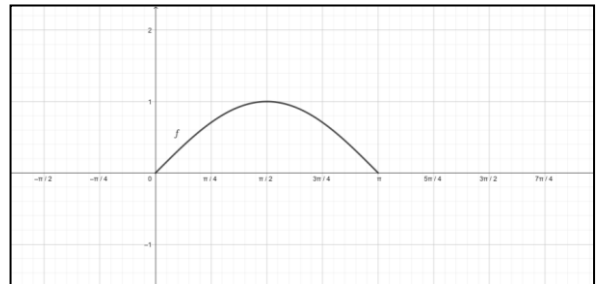
18. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in [0, \pi]$.

α) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την

$$\text{συνάρτηση } g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

ii. Ποιος είναι ο τύπος της g και σε ποιο διάστημα ορίζεται;

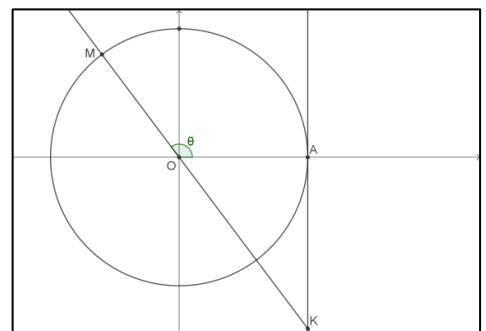
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.



19. Στο σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = \widehat{AOM}$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x=1$ στο σημείο K.

α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\theta, \epsilon\phi\theta, \sigma\phi\theta$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K.



γ) Έστω μια γωνία $\varphi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi < 0$.

- i. Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο έχει η γωνία φ την τελική πλευρά.
- ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \varphi$.

20. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \rho > 0$

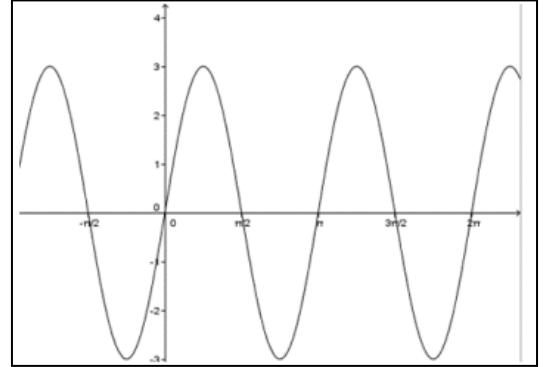
α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ .

Έστω $\rho = 3$ και $\alpha = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f , g δεν έχουν κοινό σημείο.



21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta\mu(\pi + 2x)$ με $\alpha > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή το 4.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (\alpha + 2)\eta\mu 2x$.

β) i. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

ii. Να βρείτε την περίοδο της f .

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

δ) Αν $g(x) = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

22. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho\eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

β) i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x)$, $x \in [0, \pi]$.

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu\left(\frac{5\pi}{9}\right) > \eta\mu\left(\frac{10\pi}{9}\right)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

- α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;
- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες x ' x και y ' y .
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
- δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

24. Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι 5,8 μέτρα και συμβαίνει στις 3:00 π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 2,6 μέτρα και συμβαίνει στις 9:00 π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = \alpha\eta\mu(\omega t) + \beta$, με $\alpha, \omega, \beta > 0$ και $0 \leq t \leq 24$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, ω και β .

β) Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$,

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4,2$, με $0 \leq t \leq 24$.

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;

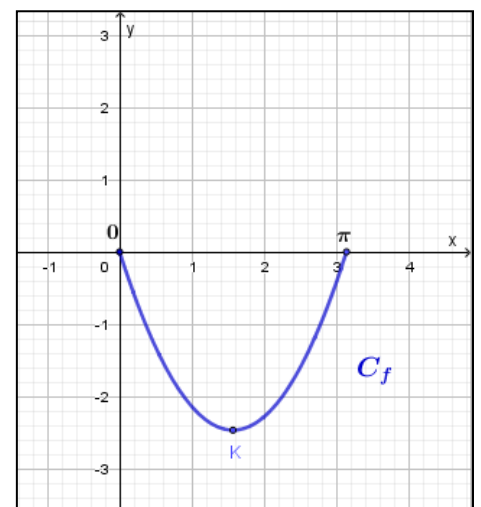
iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4,2 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

25. Οι εξισώσεις των γραμμών που αποτελούν την περίμετρο μιας επίπεδης μεμβράνης όπως φαίνεται κάτω από ένα μικροσκόπιο, είναι:

$$x = 0, y = x^2 - \pi x, y = \frac{1}{2} + \eta\mu x \text{ και } x = 3$$

Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο.

α) i. Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \pi x$, $x \in [0, \pi]$ είναι το τμήμα της παραβολής που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4}\right)$.



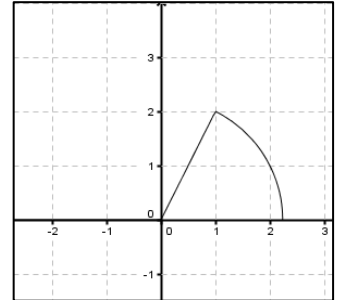
Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2} + \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ii. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων και τα διαστήματα μονοτονίας τους.

β) Να βρείτε την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

γ) Να βρείτε τις ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου πλακιδίου.

26. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται, για τις μη αρνητικές τιμές του x , η γραφική της παράσταση. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, τότε:



α) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για τις αρνητικές τιμές του x .

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν οι ακρότατες τιμές της;

γ) Έστω θ ένας αριθμός με $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i. $\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\upsilon\theta$,

ii. $f(\eta\mu\theta)$ και $f(\sigma\upsilon\upsilon\theta)$.