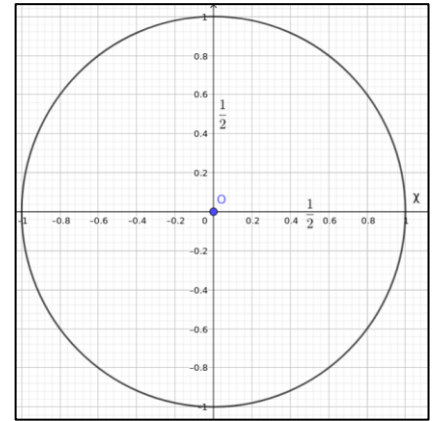


3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

1. α) Στον τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.



- β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο \mathbb{R} .

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

4. Δίνεται γωνία ω , με $0 \leq \omega \leq 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$ και $\eta\mu\omega > 0$.

α) Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $\varphi \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{1}{2}$.

5. Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = -\alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α) $\alpha = 1$, β) $\alpha = -2$.

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

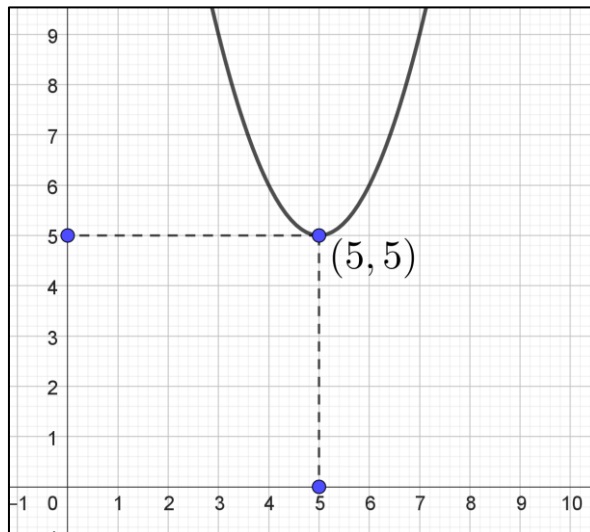
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \sqrt{3}\epsilon\phi\omega \cdot \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega = -1$, $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε:

α) i. Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ii. Για $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 10x + 30$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.



i. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g .

ii. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν κοινά σημεία.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha + 1}{2}\sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

β) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \epsilon\phi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$. Να δείξετε ότι $A = -1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

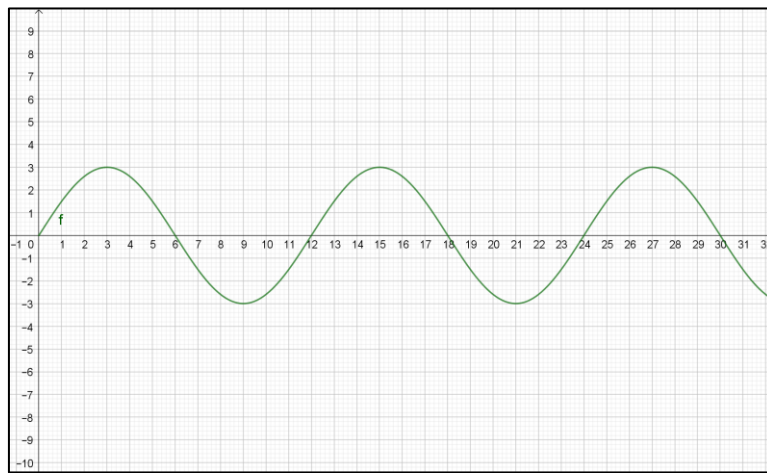
9. Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

γ) τον τύπο της συνάρτησης f .

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.



10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f .

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$.

11. α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ και $g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

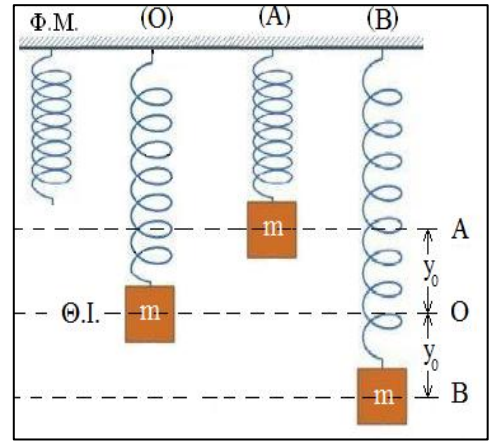
δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

12. Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση O (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση O , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση

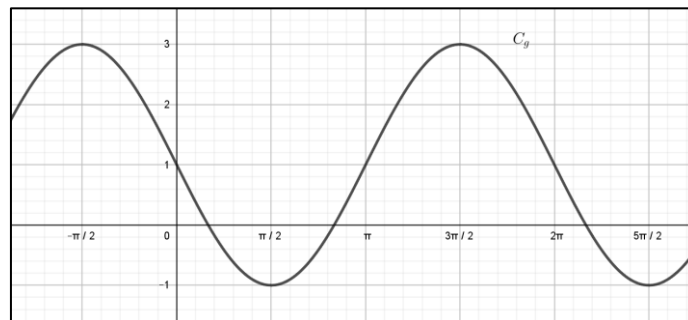
του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι: $y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.



- α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B της ταλάντωσης.
- β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.
- γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.
- δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με $1,1$ μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

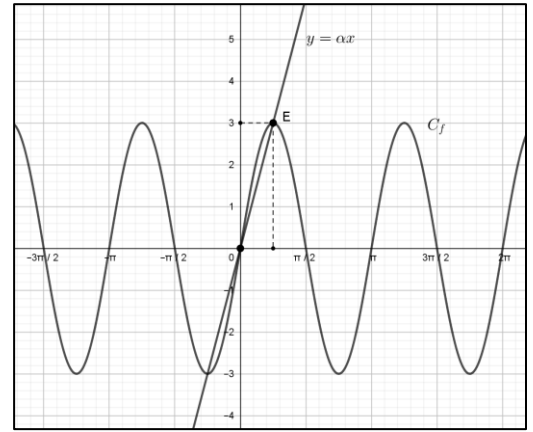
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .
- β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ και πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .



- i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- ii. Για $\alpha = -2, \beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

14. Στο σχήμα δίνεται η ευθεία $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,



α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α .

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta\mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

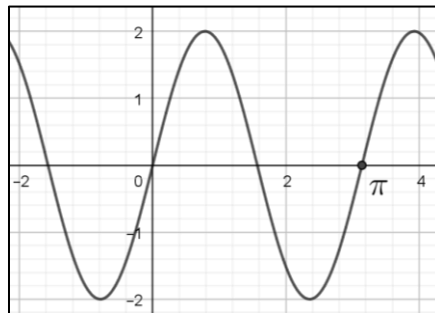
γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

δ) Για $\alpha = 2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\alpha x) \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu(\alpha x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha x) - 1$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu(\alpha x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.



β) Να βρείτε τις συνεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $(\varepsilon): y = 1$ για $x \in [0, \pi]$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

γ) Να βρείτε:

i. το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$,

ii. δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' .

δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

β) Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$ είναι $\beta = 8$.

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.