4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2-8x+4$.

α) i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

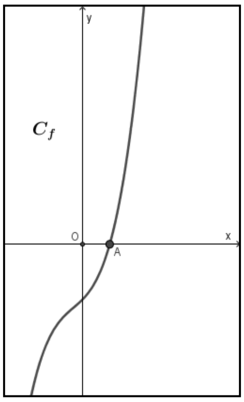
β) Αν $P(x)=(2x-1)(x^2-4)$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-2x+4$.

α) Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x^2+x-1$, $x\in\mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β) Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

i. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ρίζα.

ii. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-8x-4$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.

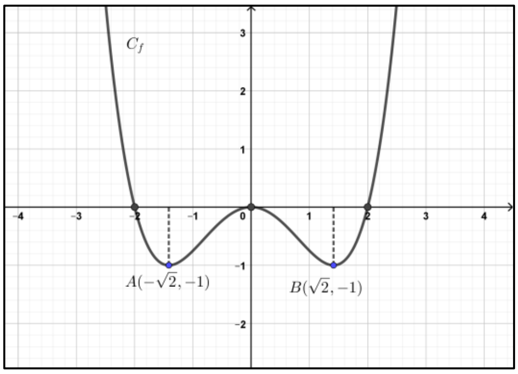
γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+3x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Αν $P(x)=(x-1)\cdot(x^2-x+2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x)>0$.

6. Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A\left(-\sqrt{2},-1\right)$ και $B\left(\sqrt{2},-1\right)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x)=0$.

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2+x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

β) Να αποδείξετε ότι $P(x)=(x-1)\cdot\left(x^2+1\right)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x+2$.

α) **i.** Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.

ii. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x+1)$.

β) Αν $P(x)=(x+1)\left(x^2-x+2\right)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-x^2-x+2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Αν $P(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<3$.

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2+2x+2$.

α) **i.** Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+1)$.

β) Αν $P(x)=(x+1)\left(x^2+2\right)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β) Αν $P(x)=(2x-1)\left(x^2+1\right)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

12. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2-x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β) Αν $P(x)=(x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

13. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)+6=0$.

14. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-7x+6$.

α) Να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

15. **α)** Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

16. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β) Αν $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$,

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3-5x^2+7x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

18. Δίνεται η εξίσωση $x^3-7x+6=0$.

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-7x+6):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3-7x+6=0$.

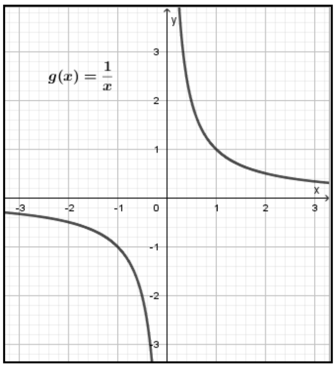
19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^3-4x^2+x+6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ) **i.** Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

ii. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι η διπλανή, να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=1$.

20. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2-2x+1$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$,

β) $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,

γ) $\dfrac{1}{2}<\text{συν}\theta<1$ για κάθε γωνία $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$,

δ) $P(\text{συν}\theta)<0$ για κάθε γωνία $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$.

21. Δίνεται η γωνία x με $\dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi$ και οι παραστάσεις

$$A=\text{ημ}^2(\pi-x)+\text{ημ}^2(\pi+x)+\text{συν}^2(-x)\quad\text{και}\quad B=\frac{\text{ημ}x}{1+\text{συν}x}+\frac{1+\text{συν}x}{\text{ημ}x}$$

α) Να αποδείξετε ότι $A=\text{ημ}^2x+1$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση B .

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις Α και Β να είναι ίσες.

22. Δύο συμμαθητές ο Αλέξανδρος και ο Φίλιππος που κάθονται στο ίδιο θρανίο σχεδιάζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε μιλιμιτρέ χαρτί και στη συνέχεια προσπαθώντας να υπολογίσουν τις συντεταγμένες ενός δοσμένου σημείου Μ αυτού του κύκλου διαφωνούν στην απάντησή τους. Ο Αλέξανδρος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι $M(0{,}8,0{,}6)$ ενώ ο Φίλιππος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του είναι $M(1,1)$.

α) Ποιος από τους δύο έχει σίγουρα άδικο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν υποθέσουμε ότι το σημείο του οποίου υπολογίστηκαν σωστά οι συντεταγμένες του είναι το $M(0{,}8,0{,}6)$,

i. να αιτιολογήσετε ότι $\text{ημ}\omega=0{,}6$ και $\text{συν}\omega=0{,}8$,

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\text{ημ}(\pi-\omega)+2\text{συν}\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega\right)+\text{εφ}(-\omega)+\text{σφ}(\pi+\omega)$.

γ) Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=5συνω\cdot x^3-10ημω\cdot x^2+5x-3$, $x\in\mathbb{R}$ όπου ω η γωνία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

23. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3+4x^2-5x-2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3+4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2-5\left(\frac{5}{x^2+1}\right)-2>0$.

24. Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο $P(x)=x^3+αx^2+bx+c$, όπου οι συντελεστές a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο Α επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο Β επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο Α επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους a, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

α) Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $α=2$, μετά ο Β επιλέγει $b=1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c=2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό – 2.

β) Ο μαθητής Α επιλέγει $α=-1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$.

γ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c=1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

δ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c=2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές α και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13 .

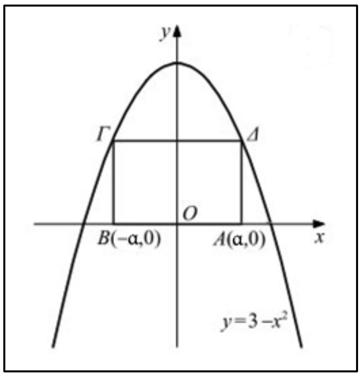
25. Δίδεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+1$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε $x^4+1=(x^2+αx+1)\cdot(x^2+βx+1)$.

γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «*Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες*». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

26. Στο σχήμα, δίνεται η παραβολή $y=3-x^2$ και τα σημεία της Γ,Δ. Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$.



α) Αν E είναι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $E=f\left(\alpha\right)=-2\alpha^3+6\alpha$ τετραγωνικές μονάδες,

ii. να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha=1$.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.

γ) Να βρεθεί η θέση του α, ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του.

27. Δίνονται τα πολυώνυμα $P\left(x\right)=x^4+x^3+\alpha x-4$ και $\delta\left(x\right)=x^2-3x+2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P\left(x\right)$ με το $\delta\left(x\right)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon\left(x\right)=24x-24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

β) Για $\alpha=2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P\left(x\right)$ με το $x-1$.

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P\left(x\right)$.

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P\left(x\right)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

28. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E=60\ cm^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

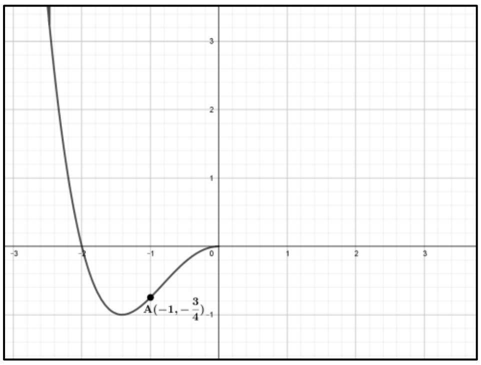
α) i. Να δείξετε ότι $y=\dfrac{120}{x}$.

ii. Αφού εκφράσετε όλες τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου συναρτήσει του x, να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση $x^3+x^2-3600=0$.

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

29. Στο σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και το σημείο $A\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$ αυτής.



α) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$.

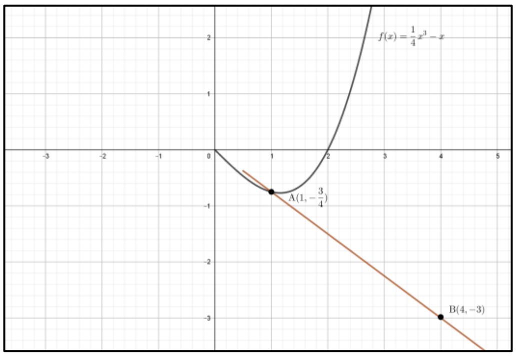
β) Για $\alpha=-1$,

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x>0$.

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{4}$, με χρήση του **β)** ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f.

30. Στο σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^3-x$, $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $B\left(4,-3\right)$.



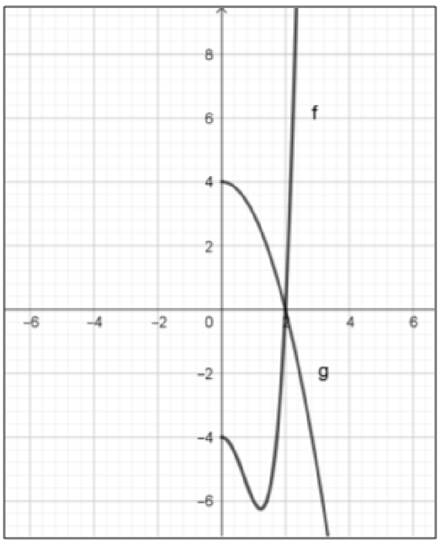
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

β) **i.** Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$.

γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y=-\frac{3}{4}x$, με χρήση του **β)** ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

31. Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=x^4-3x^2-4$ και $g\left(x\right)=-x^2+4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



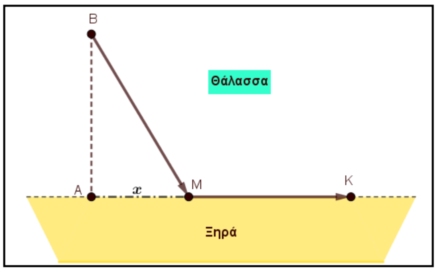
α) Να δείξετε ότι $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$ και $g\left(-x\right)=g\left(x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Στο σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να λύσετε , αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f\left(x\right)=g\left(x\right)$, **ii.** την ανίσωση $f\left(x\right)<g\left(x\right)$.

32. Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο Β σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο Κ της ακτής, το οποίο απέχει 4 km από το Α. Η διαδρομή που κάνει είναι η ΒΜ κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3 km/h και η ΜΚ τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5 km/h. Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s



που διανύεται, της ταχύτητας υ και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t, είναι $\upsilon = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{\upsilon}$. Αν το σημείο Μ απέχει από το Α απόσταση x km, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η $t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}$, $x \in [0,4]$.

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή – δρομέα να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

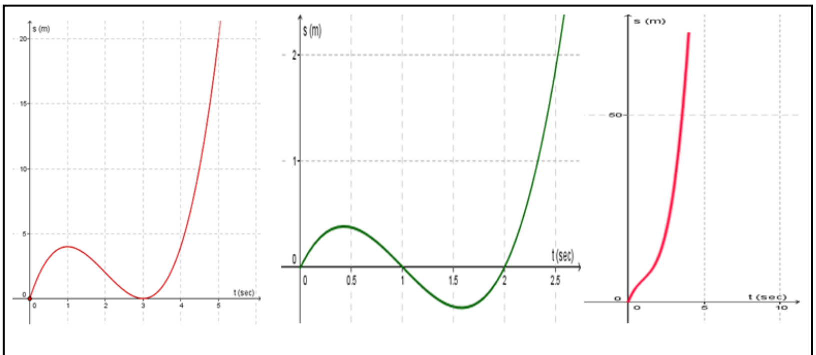
33. Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$.

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



(I) (II) (III)

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+\kappa x-1$, με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ για την οποία $f(-x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Για $\kappa=0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$,

ii. να δείξετε ότι $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

iii. να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

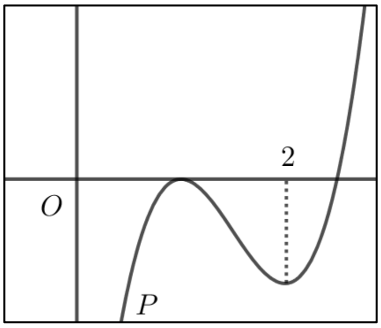
35. **α)** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x-5$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι – 1, να δείξετε ότι $\begin{cases} 2\alpha+\beta=-6 \\ \text{και} \\ \alpha+\beta=3 \end{cases}$.

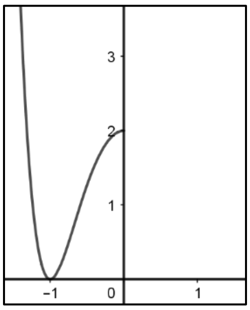
ii. Να δείξετε ότι $\alpha=-9$ και $\beta=12$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)=2x^3-9x^2+12x-5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η διπλανή, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.



36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^6-3x^2+2$.



α) Να αποδείξετε ότι f είναι άρτια.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να συμπληρώσετε στο σχήμα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$.

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

37. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α,β, αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$.

β) Για $\alpha=4,\beta=-2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2+5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. Αν $P(x)=\left(x^2+5\right)\left(x^2-2x-6\right)+14x+28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=14\left(x+2\right)$.

38. Η μέση θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T\left(x\right)=x^3-10x^2+31x-30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν ^{o}C.

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha<\beta<\gamma$ ώστε να ισχύει $T\left(x\right)=\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)\left(x-\gamma\right)$.

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία T είναι συνεχώς κάτω από μηδέν ^{o}C. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

39. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2-4 δίνει υπόλοιπο $4x+1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):\left(x^2-4\right)$.

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

γ) Έστω $\alpha=4$ και $\beta=5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):\left(x^2-4\right)$ είναι το $\pi(x)=x^3-1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):\left(x^2-4\right)$.

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x)<4x+1$.

40. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-5x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του,

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.