

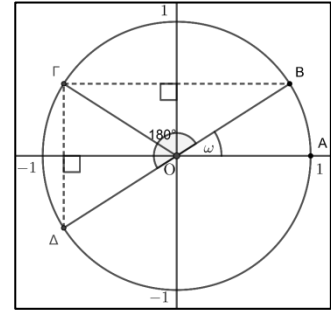
1. ΘΕΜΑ_4_15187

Για τη γωνία ω του σχήματος ισχύει $5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0$.

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

β) Να βρείτε:

- i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,
- ii. τις συντεταγμένες των σημείων B, Γ και Δ.
- iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $\widehat{A\hat{O}B}$, $\widehat{A\hat{O}\Gamma}$ και $\widehat{A\hat{O}\Delta}$.



2. ΘΕΜΑ_4_15377

Μία κυβική δεξαμενή A έχει ακμή με μήκος x μέτρα. Αν αυξηθεί η μία μόνο διάστασή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή B σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

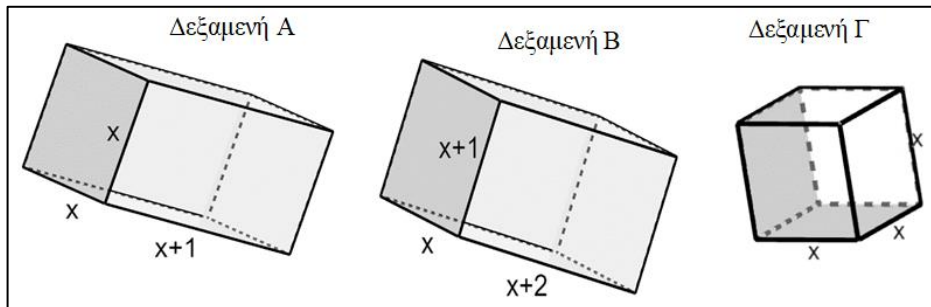
α) Να βρείτε τη διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x .

β) Αν ο όγκος της δεξαμενής B είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

- i. τις διαστάσεις των δεξαμενών A και B,
- ii. τη διαφορά των όγκων $\Delta(x)$.

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί άλλη μία διάσταση της δεξαμενής B κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών A, B και Γ.



3. ΘΕΜΑ_4_17941

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1).

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $\alpha = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

δ) Να αποδείξετε ότι:

- i. Για $\alpha = 2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

- ii. Για $\alpha \neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

4. ΘΕΜΑ_4_20647

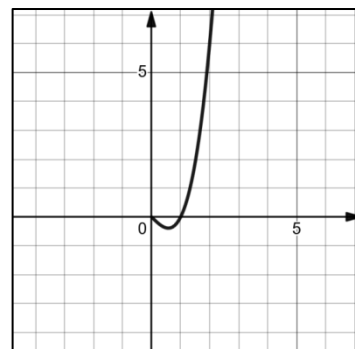
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x + 3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος. Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε:
 β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{21}{2}$.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.
 δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$.

5. ΘΕΜΑ_4_18111

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$ και $h(x) = x^3 - x, x \in \mathbb{R}$.

- α) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.
 ii. Να συμπληρώσετε το σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h .
 iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.

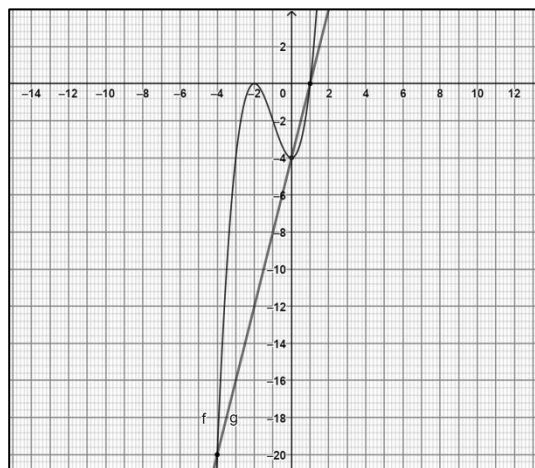


- β) Αν $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $(\varepsilon): y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

6. ΘΕΜΑ_4_18696

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ και $g(x) = 4x - 4$, με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.
 β) Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
 γ) Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



7. ΘΕΜΑ_4_20731

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 6x^2 - 7$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

γ) i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$, να λύσετε την εξίσωση

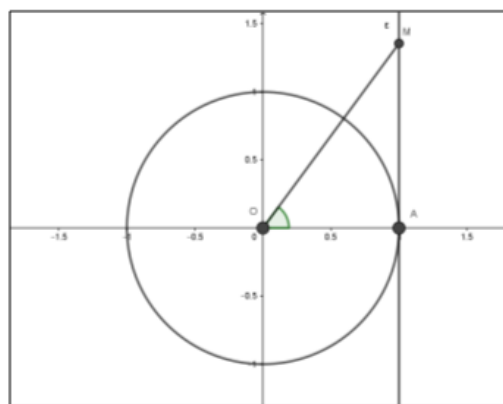
$$(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0, \text{ για } x \in \mathbb{R}$$

8. ΘΕΜΑ_4_20759

Το εμβαδόν του τριγώνου OAM που βλέπετε στο σχήμα είναι

$(OAM) = \frac{4}{6}$ τετραγωνικές μονάδες. Η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο A .

εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο A .



α) Να αποδείξετε ότι για τη γωνία $\omega = \hat{AOM}$ ισχύει

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{4}{3}, 0 < \omega < \frac{\pi}{2}.$$

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$,

$\sigma\upsilon\omega$, $\sigma\phi\omega$ της γωνίας $\omega = \hat{AOM}$ αν ισχύει $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = \eta\mu^2 x - 5\eta\mu\omega \cdot \eta\mu x + 5\sigma\upsilon\omega$ και του άξονα $x'x$, όπου $\omega = \hat{AOM}$ η γωνία του προηγούμενου ερωτήματος και $x \in \mathbb{R}$.

9. ΘΕΜΑ_4_18713

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 2x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $P(1) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης

$P(x) : (x - 2)$ ισούται με 15,

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

β) i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

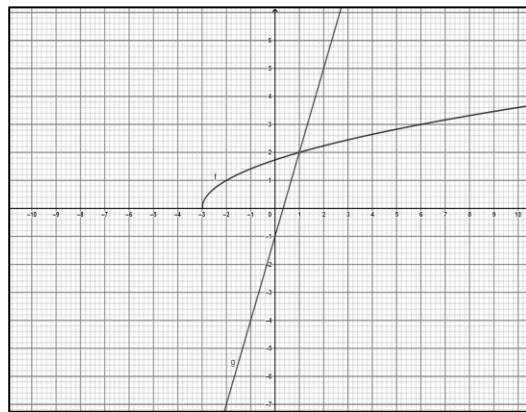
ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\eta^3 x + \sigma\upsilon\eta x = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 x$, $x \in (0, 2\pi)$.

10. ΘΕΜΑ_4_15037

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και $g(x) = 3x - 1$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
- γ) **i.** Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.
- ii.** Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του **i.** ερωτήματος.

**11. ΘΕΜΑ_4_15270**

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.
- β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P = [2f(\alpha) - 1][2f(\beta) - 1]$.
- γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.

