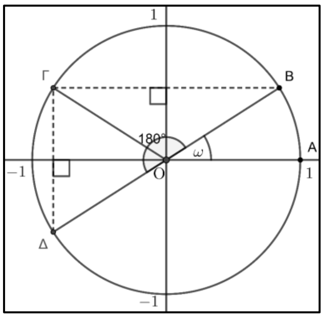
4.4 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

1. Για τη γωνία ω του σχήματος ισχύει $5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0$.



α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

β) Να βρείτε:

i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β, Γ και Δ.

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$.

2. Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα. Αν αυξηθεί η μία μόνο διάστασή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

α) Να βρείτε τη διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x.

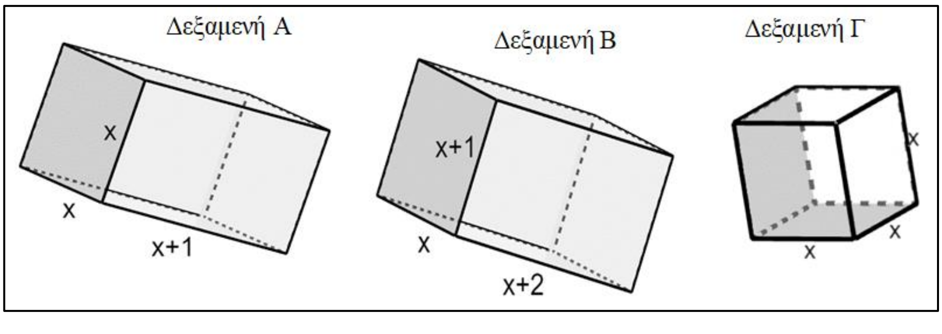
β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

i. τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β,

ii. τη διαφορά των όγκων $\Delta(x)$.

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί άλλη μία διάσταση της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ.



3. Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1).

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $\alpha = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

δ) Να αποδείξετε ότι:

i. Για $\alpha=2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii. Για $\alpha\neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho\in[-2,2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-\beta x+3$, $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος. Αν επιπλέον $P(1)=0$, τότε:

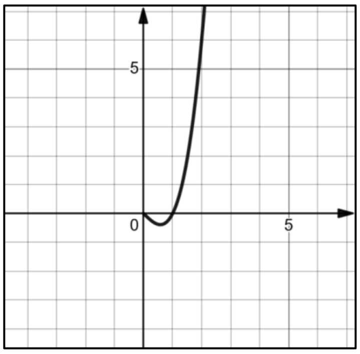
β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$ και $\beta=\dfrac{21}{2}$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\leq 0$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sigma\upsilon\nu x)=0$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x\geq 0\\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x<0\end{cases}$ και $h(x)=x^3-x, x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

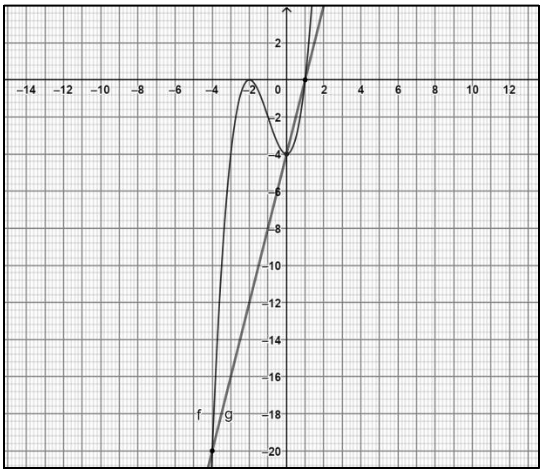


ii. Να συμπληρώσετε το σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h.

iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.

β) Αν $x\geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $(\varepsilon): y=x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

6. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^3+3x^2-4$ και $g(x)= 4-x$, με $x\in\mathbb{R}$.



α) Από τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

β) Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

γ) Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+6x^2-7$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

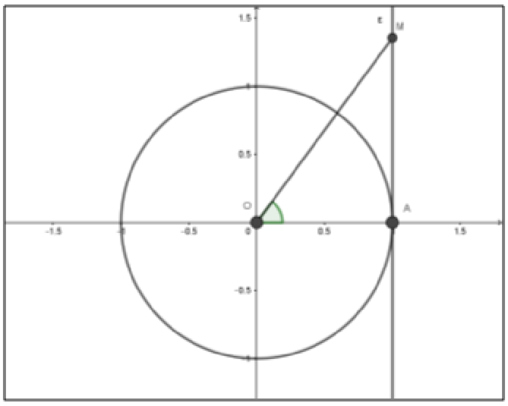
β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

γ) i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

ii. Αν οι αριθμοί – 1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$, να λύσετε την εξίσωση

$$(2\eta\mu x-1)^4+6(2\eta\mu x-1)^2-7=0 \text{ , για } x\in\mathbb{R}$$

8. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ που βλέπετε στο σχήμα είναι $(OAM)=\dfrac{4}{6}$ τετραγωνικές μονάδες. Η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο Α.



α) Να αποδείξετε ότι για τη γωνία $\omega=A\hat{O}M$ ισχύει

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{4}{3}\ ,0<\omega<\frac{\pi}{2}.$$

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\varphi\omega$ της γωνίας $\omega=A\hat{O}M$ αν ισχύει $0<\omega<\dfrac{\pi}{2}$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu^2x-5\eta\mu\omega\cdot\eta\mu x+5\sigma\upsilon\nu\omega$ και του άξονα $x'x$, όπου $\omega=A\hat{O}M$ η γωνία του προηγούμενου ερωτήματος και $x\in\mathbb{R}$.

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-\alpha x^2+2x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν $P(1)=2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ ισούται με 15,

α) Να δείξετε ότι $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

β) i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x)=x^2+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^3x+\sigma\upsilon\nu x=1-\dfrac{1}{2}\eta\mu^2x$, $x\in(0,2\pi)$.

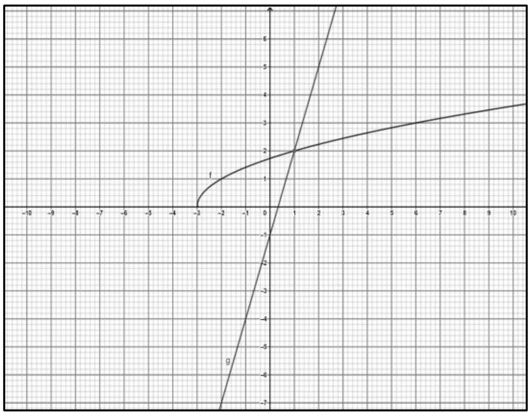
10. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+3}$ και $g(x)=3x-1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

γ) **i.** Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του **i.** ερωτήματος.



11. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P = [2f(\alpha) - 1][2f(\beta) - 1]$.

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x) = 1 - \sqrt{x},\ x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.