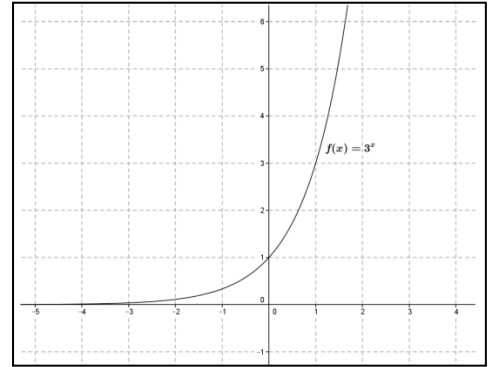


5.1 Εκθετική συνάρτηση

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3^x + 1$ και $h(x) = 3^x - 1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h ;



2. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

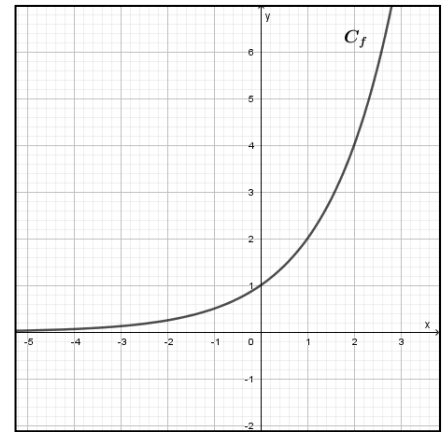
$$f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $2^x - 1 = 0$.

β) i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = 2^x - 1, x \in \mathbb{R}$$

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες συντεταγμένων.



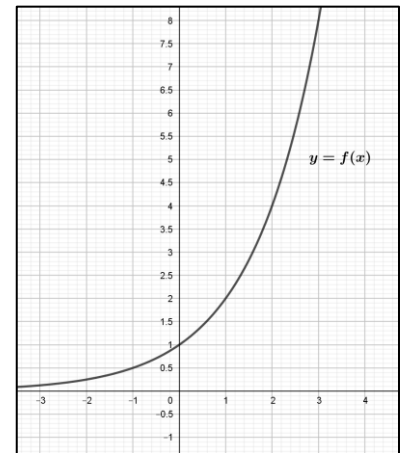
3. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού το σύνολο \mathbb{R} .

α) i. Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

ii. Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 32$.



4. Δίνεται το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .

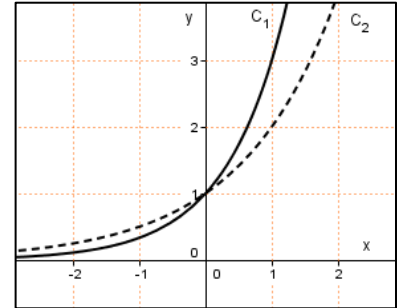
α) Αν η συνάρτηση f είναι η εκθετική συνάρτηση α^x , $0 < \alpha < 1$, να βρείτε το α .

β) Για $\alpha = \frac{1}{2}$,

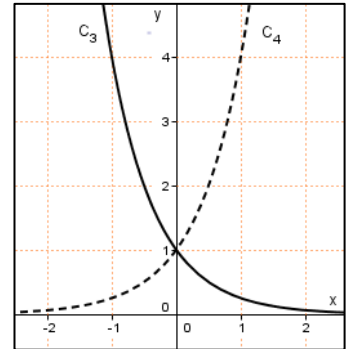
i. να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$.

ii. να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^{\sqrt{2}}$, $\alpha^{\sqrt{3}}$.

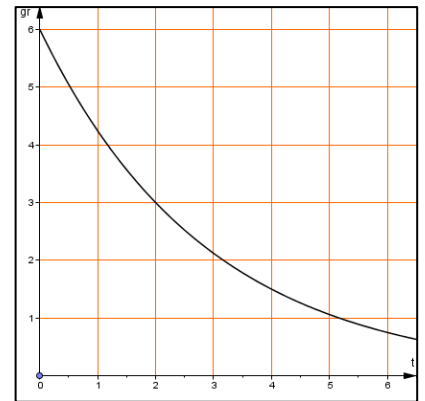
5. α) Ποια από τις δύο καμπύλες C_1 (συνεχής γραμμή) και C_2 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ και ποια της συνάρτησης $g(x) = 3^x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



- β) Ποια από τις δύο καμπύλες C_3 (συνεχής γραμμή) και C_4 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$ και ποια της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



6. Η καμπύλη που φαίνεται στο παρακάτω σύστημα αξόνων δείχνει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού σε συνάρτηση με το χρόνο. Ειδικότερα, ο οριζόντιος άξονας δηλώνει τον χρόνο t σε ημέρες (π.χ. η 1η ημέρα αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα από $t=0$ μέχρι $t=1$, η 2η ημέρα στο χρονικό διάστημα από $t=1$ μέχρι $t=2$ κ.λπ.) και ο κατακόρυφος άξονας δηλώνει την ποσότητα του υλικού σε γραμμάρια (gr).



α) Πόσα γραμμάρια ήταν η αρχική ($t=0$) ποσότητα του ραδιενεργού υλικού;

β) Πόση είναι η ημιζωή (ή χρόνος υποδιπλασιασμού) του ραδιενεργού υλικού;

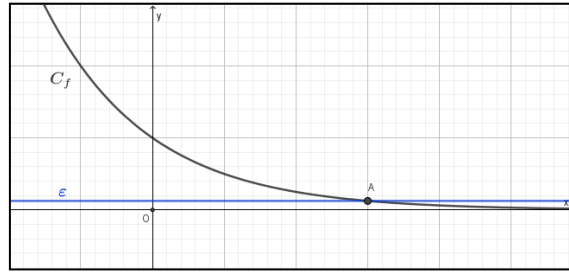
γ) Κατά τη διάρκεια ποιās ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1 gr;

Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f και της ευθείας (ϵ): $y = \frac{1}{8}$.

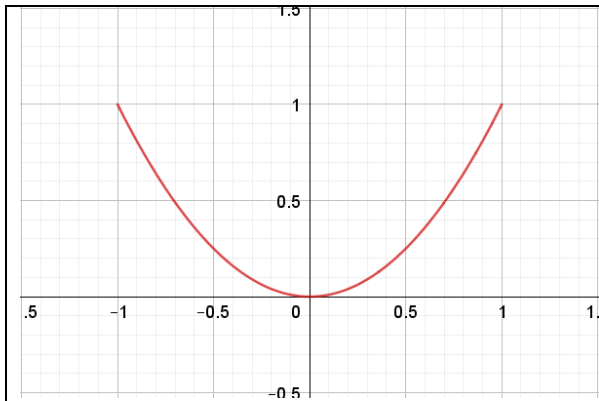


β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία (ϵ).

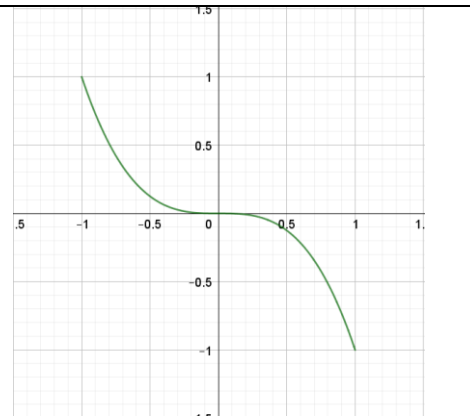
γ) Να βρείτε για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία (ϵ).

8. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1,1]$, η οποία είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα.

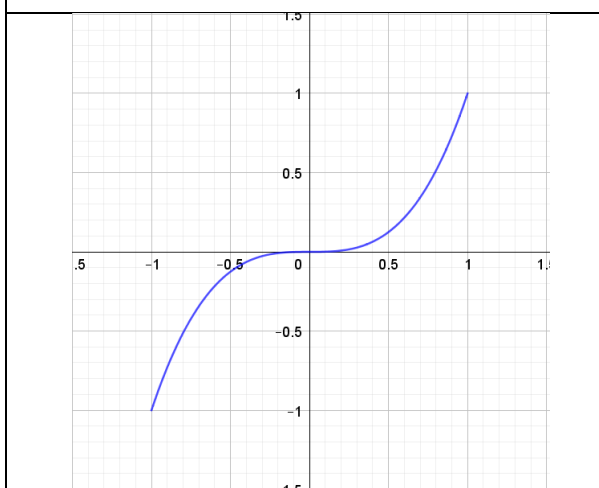
α) Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις μόνο μία μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της f . Να βρείτε ποια είναι αιτιολογώντας την απάντησή σας.



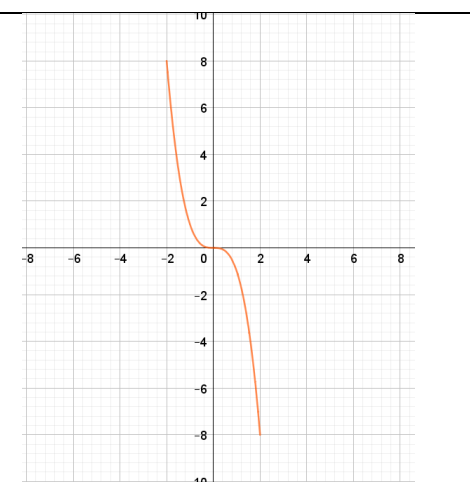
Σχήμα α



Σχήμα β



Σχήμα γ



Σχήμα δ

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 2$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = f(x - 1)$.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $s(x) = e^x - 1$ και να αποδείξετε (αλγεβρικά ή γραφικά) ότι η εξίσωση $s(x) = f(x)$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{2-\lambda}{4}\right)^x$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση.

β) Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;

γ) Για $\lambda = 0$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 6$.

10. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, τότε:

α) Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O .

δ) Έστω $f(x) = -2x^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω.

11. α) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .

δ) Αν $g(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.
- α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.
- β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο A .
- γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

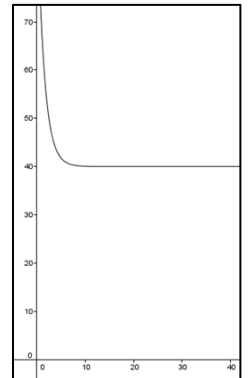
14. Είναι γνωστό ότι όταν κάποιος μελετάει για να συμμετάσχει σε κάποιες εξετάσεις, με την πάροδο του χρόνου δεν συγκρατεί στη μνήμη του το σύνολο όσων μελέτησε. Ένα μοντέλο που δείχνει το ποσοστό $P(t)$ της γνώσης που παραμένει στην μνήμη του t εβδομάδες μετά το τέλος της μελέτης, είναι το μοντέλο Ebbinghaus και περιγράφεται από τον τύπο $P(t) = Q + (100 - Q)e^{-ct}$, $t \in [0, 40]$, όπου Q είναι το ποσοστό της γνώσης που θυμάται πάντα και c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μάθημα. Αν $Q = 40$ και $c = 0,7$ τότε:

- α) Τι δείχνει το $P(0)$ στα πλαίσια του προβλήματος;
- β) Μετά από πόσες εβδομάδες θα έχει παραμείνει στην μνήμη του το 50% της γνώσης που απέκτησε.

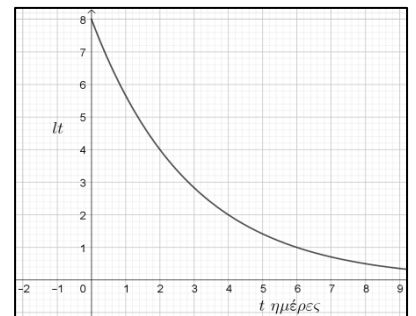
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο σχήμα. Με βάση το σχήμα:

- γ) Να εκτιμήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση, αν μετά από τρεις εβδομάδες θα θυμάται πάνω ή κάτω από το 50% του υλικού που μελέτησε. Η εκτίμησή σας συμφωνεί με το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος;
- δ) Πως αιτιολογείται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης, για μεγάλες τιμές του t , φαίνεται να προσεγγίζει πάρα πολύ την ευθεία $y = 40$. Γιατί δεν μπορεί να «κατέβει» κάτω από την ευθεία αυτή;

(Θεωρήστε: $\ln 6 = 1,79$)



15. Ένα δοχείο περιέχει υγρό το οποίο εξατμίζεται. Στο διάγραμμα φαίνεται η ποσότητα Q , σε λίτρα, του υγρού που έχει απομείνει στο δοχείο μετά από t ημέρες. Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται εκθετικά και μετά από t ημέρες δίνεται από τη σχέση $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{c}}$, $c \in \mathbb{R}$, όπου Q_0 η αρχική ποσότητα του υγρού.



- α) Με βάση το διάγραμμα:
- i. να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος t σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα $Q(t)$ του υγρού σε λίτρα.				

- ii. να βρείτε την αρχική ποσότητα Q_0 του υγρού,

iii. να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα του υγρού που υπήρχε τη χρονική στιγμή $t=0$ στο δοχείο.

β) Αν $Q_0 = 8$ και $Q(2) = 4$, να δείξετε ότι $c = 2$.

γ) Αν $Q(t) = 8 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$, να δείξετε ότι χρειάζεται να περάσουν δύο ημέρες για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα $Q(t)$ του υγρού που υπάρχει στο δοχείο οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

Αν $\alpha = 5$ και $\beta = -7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$.

17. Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t=0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = q_0 \cdot \alpha^t$, $t \geq 0$, όπου οι αριθμοί α , q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < \alpha < 1$.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0 .

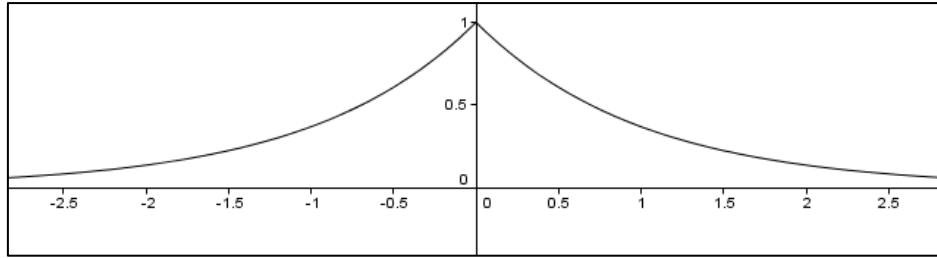
t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$.

18. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



- α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f .

$$A. f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad B. f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

- γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0,1)$.