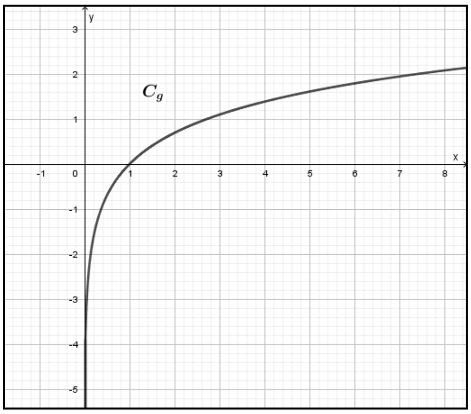
5.3 Λογαριθμική συνάρτηση

1. Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln\left(e^x - 1\right) = A$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$, $x > 0$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1-x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(1-x) = \ln\left(x^2+1\right)$.

4. Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

γ) Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \ln(x-1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $\log x = 3$, **ii.** $\ln(x-1) = 1$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(x+2)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $f(x) = 2$, **ii.** $g(x) = 2f(x)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

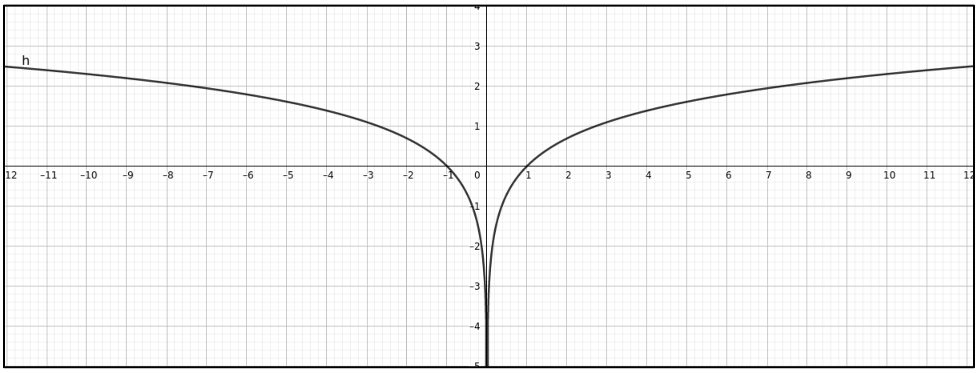
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-\ln|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) i. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



ii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x)=\ln x$, $x>0$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για $x=1$.

9. Δίνεται η παράσταση $A=\ln(\ln e)+\log\left(\log 10^{10}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $\log 10^{10}=10$ **ii.** $A=1$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log\left(x^2+1\right)=A$.

10. Δίνονται οι παραστάσεις $A=2\log 6-\log 12$ και $B=\log 5+\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A=\log 3$ και $B=1$.

β) Να αποδείξετε ότι $A<B$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log x<1$.

11. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση $\log(x+1)=-\log 2-\log(1-x)$ (1).

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1)=\log\left(\frac{1}{2}\right)-\log(1-x)$.

12. Δίνεται η παράσταση $A = e^{\ln 2} + 10^{2\log\sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = 7$.

β) $0 < \log A < 1$.

13. Δίνεται η παράσταση $A = \ln\sqrt{e} + \log\sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = \frac{7}{6}$.

β) $0 < \ln A < 1$.

Δίνεται $e \simeq 2.71$.

14. Δίνεται η εξίσωση $\log\left(x^2 + 1\right) = 1 - \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 - \log 2 = \log 5$.

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right) = \log x$, $x > 0$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f\left(100\right)$, $f\left(\sqrt{10}\right)$.

β) Για $x > 1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f\left(x+1\right) + f\left(x-1\right) = \log 10 - \log 5$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x+1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O\left(0, 0\right)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right) = 2$.

17. **α)** Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A = \ln x + \ln\left(x+6\right)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + \ln\left(x+6\right) = \ln 7$.

18. **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $\ln\left(x+1\right) = \ln\left(2x\right)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln\left(x+1\right) > \ln\left(2x\right)$.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln\left(x^2 + 4\right)$ και $g\left(x\right) = \ln x + \ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right) = g\left(x\right)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right) = \ln\left(x+1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

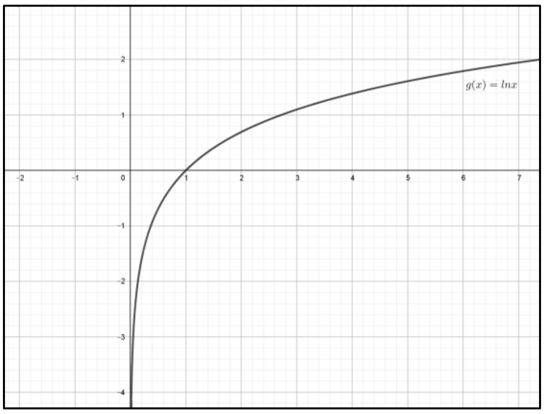
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y=\ln x$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

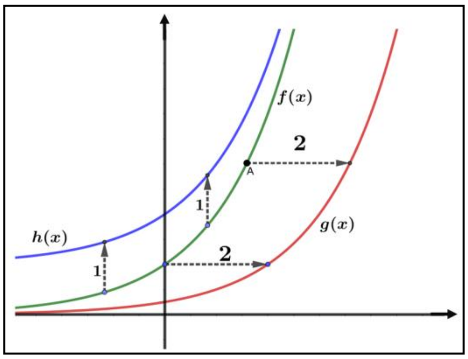
β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$.



Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g.

22. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2^x$, $x\in\mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων $g(x)$ και που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x)$.



α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$ και $h(x)$ από την γραφική παράσταση της $f(x)$.

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2-2x+3)$, με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$.

β) Να δείξετε ότι $\ln 3+3\ln 2-f(3)=\ln 4$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\ln 4$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

25. Δίνεται η εξίσωση $\log\left(x^2+1\right)=1+\log 3-\log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log\left(x^2+1\right)=\log 5$.

β) Να λύσετε την εξίσωση.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον $x'x$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left(10^x-1\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)+x=\log\left(10^{2x}-10^x\right)$, $x>0$.

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y=-x$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left(\dfrac{4^x-1}{2^x+5}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log 3-\log 7$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log 3-\log 7$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$.

30. Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t=0$).

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

31. Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο $P(t)=200\cdot e^{ct}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος $(t=0)$. Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1,64)\cong 0,5$ και $\ln 10\cong 2,3$).

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

β) Να αποδείξετε ότι $c=\frac{1}{2}$.

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

32. Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας.

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t)=V_0\cdot\alpha^t$, όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α.

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t)=10\cdot(0,85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0,5)\simeq -0,3$ και $\log(0,85)\simeq -0,07$).

33. Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m-M=5\cdot\log\left(\frac{d}{10}\right)$ (I), όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με 3,26 έτη φωτός $=30,9\cdot 10^{12}$ Km.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1,157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100\,\text{parsec}$ από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d.

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος $0,46$ και απόλυτο μέγεθος $-5,14$. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$, $\Gamma(x,\ln x)$.

35. Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή. Αν Q_o είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_o e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\frac{\ln 2}{c}$.

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο

$$Q(t) = Q_o e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$$

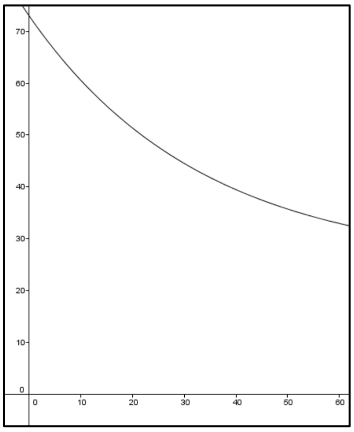
γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακας -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.

36. Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_\alpha = 25^o C$, έχει θερμοκρασία $T_o = 73^o C$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση $T(t) = T_\alpha + ce^{-\kappa t}$, όπου όπου c, κ κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι $61^o C$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$.

β) Να βρείτε την σταθερά κ. (Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2}=0,3$).

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από 40^oC, να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος **γ),** γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ είναι το $(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'x$.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\alpha\in\mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(x+1)=14$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x$, $x>0$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2)+f(4)=\dfrac{1}{3}f(8)$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

γ) Να βρείτε:

i. τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία ,

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x-1$.

γ) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha>0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y=x+\alpha$.

41. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\alpha x^2+7x-\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x-3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι $\upsilon=-16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β.

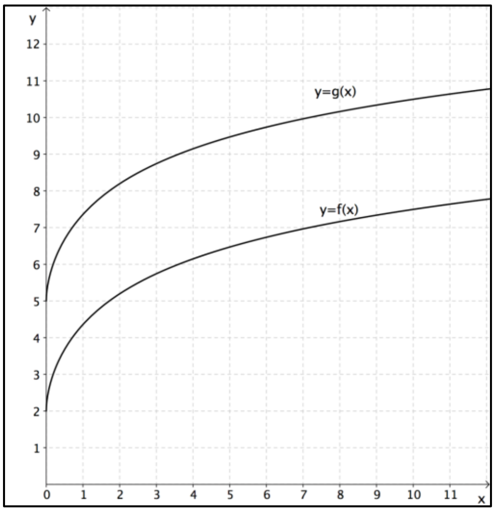
Αν είναι $\alpha=5$, $\beta=3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$,

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x)<0$,

δ) Αν $P(\ln\kappa)<0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ.

42. Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μια στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g. Στον οριζόντιο άξονα $x'x$ καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο



$$f(x)=\alpha\sqrt{\ln(x+1)}+\ln(x+1)+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B\left(e^2-1,2\sqrt{2}+4\right)$ ενώ για την γραφική παράσταση της g, γνωρίζουμε ότι προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=2$. Στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g.

β) Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στη συνέχεια, με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία.

γ) Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12ου μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε: υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\sqrt{10^x-2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(\log 2,+\infty)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\log\sqrt{\frac{10^x}{3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\frac{10^x}{3}}=\sqrt{10^x-2}$ με $x\in(\log 2,+\infty)$.

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g.

44. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-x+2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

β) $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$.

γ) $1<\log 20<2$.

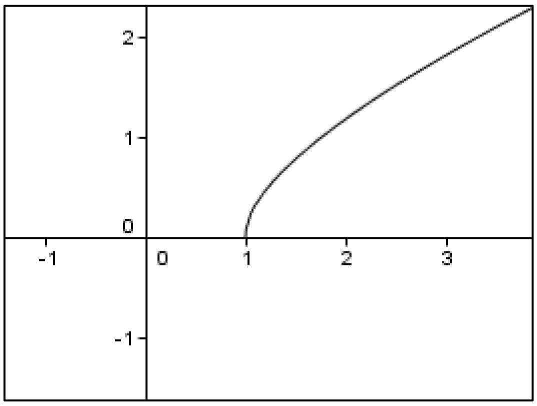
δ) $P(\log 20)<0$.

45. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x\ln x}$ και $g(x)=\sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.



γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y=1-x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1-x$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2$, $x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=\ln x$.

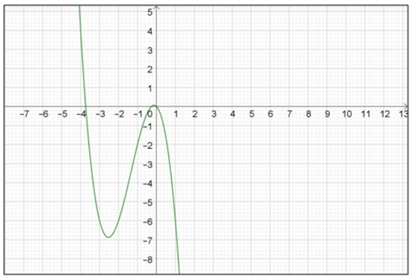
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2$, $x\neq 0$.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y=2$.

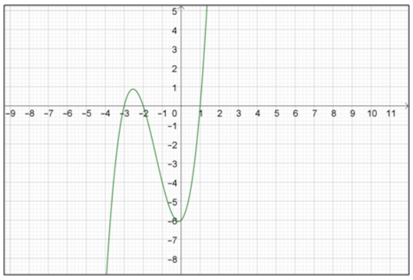
47. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

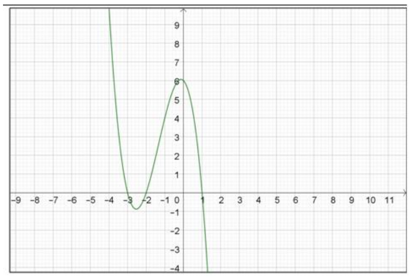
β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.



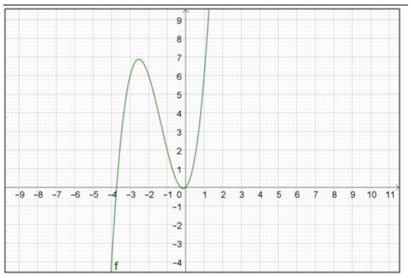
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

48. Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - 3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

49. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x > 0$.