

1. ΘΕΜΑ_2_21956

Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(e^x - 1) = A$.

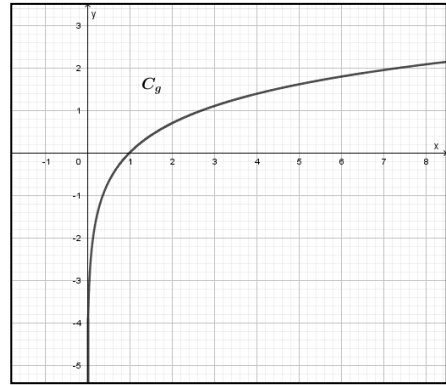
2. ΘΕΜΑ_2_20853

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.



3. ΘΕΜΑ_2_20730

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1-x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(1-x) = \ln(x^2 + 1)$.

4. ΘΕΜΑ_2_20729

Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

γ) Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

5. ΘΕΜΑ_2_20727

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \ln(x-1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $\log x = 3$

ii. $\ln(x-1) = 1$

6. ΘΕΜΑ_2_20725

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(x+2)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $f(x) = 2$

ii. $g(x) = 2f(x)$

7. ΘΕΜΑ_2_19908

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

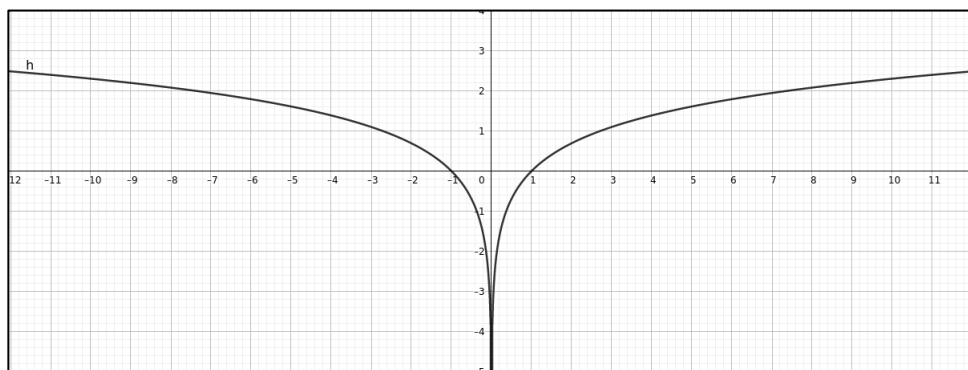
8. ΘΕΜΑ_2_15617

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln|x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) i. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



ii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = \ln x$, $x > 0$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για $x = 1$.

9. ΘΕΜΑ_2_21954

Δίνεται η παράσταση $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $\log 10^{10} = 10$

ii. $A = 1$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = A$.

10. ΘΕΜΑ_2_20851

Δίνονται οι παραστάσεις $A = 2\log 6 - \log 12$ και $B = \log 5 + \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log 3$ και $B = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $A < B$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log x < 1$.

11. ΘΕΜΑ_2_21174

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση $\log(x+1) = -\log 2 - \log(1-x)$ (1).

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1-x)$.

12. ΘΕΜΑ_2_21953

Δίνεται η παράσταση $A = e^{\ln 2} + 10^{2 \log \sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = 7$.

β) $0 < \log A < 1$.

13. ΘΕΜΑ_2_21952

Δίνεται η παράσταση $A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = \frac{7}{6}$.

β) $0 < \ln A < 1$.

Δίνεται $e \approx 2.71$.

14. ΘΕΜΑ_2_21675

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 - \log 2 = \log 5$.

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

15. ΘΕΜΑ_2_20692

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log x$, $x > 0$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100)$, $f(\sqrt{10})$.

β) Για $x > 1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1) + f(x-1) = \log 10 - \log 5$.

16. ΘΕΜΑ_2_20635

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

17. ΘΕΜΑ_2_21473

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A = \ln x + \ln(x+6)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + \ln(x+6) = \ln 7$.

18. ΘΕΜΑ_2_21472

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1) = \ln(2x)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1) > \ln(2x)$.

19. ΘΕΜΑ_2_21450

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

20. ΘΕΜΑ_2_21449

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$.

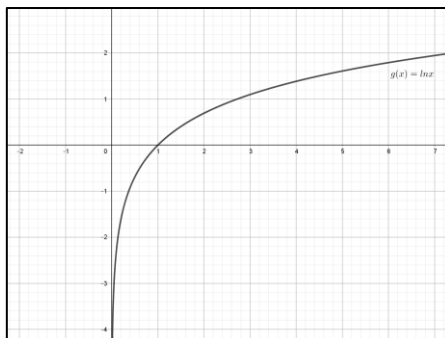
21. ΘΕΜΑ_2_15808

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

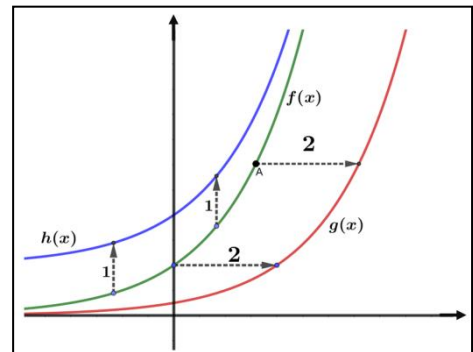
γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$.



Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g .

22. ΘΕΜΑ_2_15393

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x)$.



α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$ και $h(x)$ από την γραφική παράσταση της $f(x)$.

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16.

23. ΘΕΜΑ_2_17318

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$.

β) Να δείξετε ότι $\ln 3 + 3 \ln 2 - f(3) = \ln 4$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 4$.

24. ΘΕΜΑ_2_15675

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

25. ΘΕΜΑ_2_15267

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2 + 1) = \log 5$.

β) Να λύσετε την εξίσωση.

26. ΘΕΜΑ_3_15676

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
- γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον $x'x$.

27. ΘΕΜΑ_4_15093

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

- α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.
- β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$.
- δ) Να βρείτε τις συνεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

28. ΘΕΜΑ_4_21445

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\left(\frac{4^x - 1}{2^x + 5}\right)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

29. ΘΕΜΑ_4_21446

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3 \ln 2$.

30. ΘΕΜΑ_4_21470

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

- α) Να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$).

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

31. ΘΕΜΑ_4_21447

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο $P(t) = 200 \cdot e^{ct}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t = 0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1,64) \cong 0,5$ και $\ln 10 \cong 2,3$).

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

32. ΘΕΜΑ_4_21474

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας.

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot a^t$, όπου V_0 και a σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και a .

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t) = 10 \cdot (0,85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0,5) \cong -0,3$ και $\log(0,85) \cong -0,07$).

33. ΘΕΜΑ_4_15694

Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5 \cdot \log\left(\frac{d}{10}\right) (I)$, όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με $3,26$ έτη φωτός $= 30,9 \cdot 10^{12}$ Km.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1,157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d .

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0,46 και απόλυτο μέγεθος $-5,14$. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

34. ΘΕΜΑ_4_18865

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f .
- γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$, $\Gamma(x,\ln x)$.

35. ΘΕΜΑ_4_21678

Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή. Αν Q_0 είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\frac{\ln 2}{c}$.

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$$

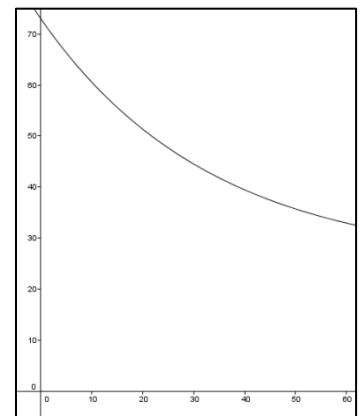
γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακας -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.

36. ΘΕΜΑ_4_21679

Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_a = 25^\circ\text{C}$, έχει θερμοκρασία $T_0 = 73^\circ\text{C}$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση $T(t) = T_a + ce^{-kt}$, όπου όπου c , k κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι 61°C , τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$.
- β) Να βρείτε την σταθερά k . (Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1.2} = 0,3$).

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από 40°C , να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

37. ΘΕΜΑ_4_21950

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'x$.

38. ΘΕΜΑ_4_15591

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + 5}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\alpha \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 14$.

39. ΘΕΜΑ_4_21680

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

γ) Να βρείτε:

i. τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία,

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

40. ΘΕΜΑ_4_15688

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + \alpha$.

41. ΘΕΜΑ_4_20857

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + 7x - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ είναι $\nu = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β .

Αν είναι $\alpha = 5, \beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$,

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$,

δ) Αν $P(\ln \kappa) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ .

42. ΘΕΜΑ_4_25463

Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μια στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g . Στον οριζόντιο άξονα $x'x$ καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο

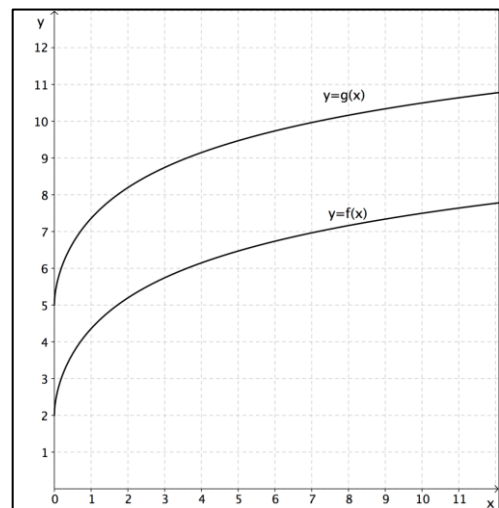
$$f(x) = \alpha \sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(e^2 - 1, 2\sqrt{2} + 4)$ ενώ για την γραφική παράσταση της g , γνωρίζουμε ότι προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 2$. Στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

β) Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στη συνέχεια, με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία.

γ) Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12ου μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε: υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο.



43. ΘΕΜΑ_4_21674

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \sqrt{10^x - 2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (\log 2, +\infty)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \log \sqrt{\frac{10^x}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2}$ με $x \in (\log 2, +\infty)$.

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g .

44. ΘΕΜΑ_4_37476

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$.

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

γ) $1 < \log 20 < 2$.

δ) $P(\log 20) < 0$.

45. ΘΕΜΑ_4_16001

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ και $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

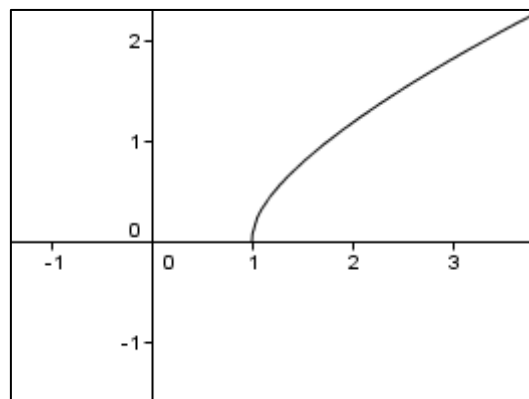
β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$.



46. ΘΕΜΑ_4_15690

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

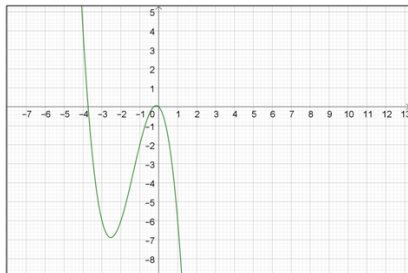
δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

47. ΘΕΜΑ_4_15678

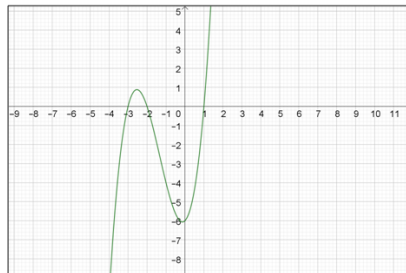
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

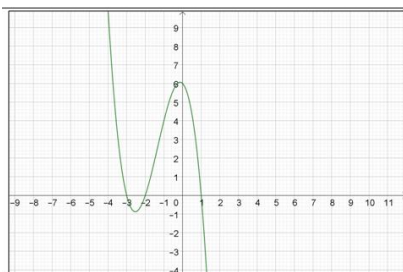
β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.



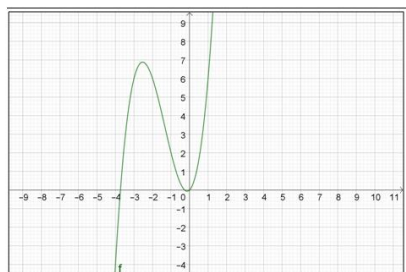
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

48. ΘΕΜΑ_4_15679

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

49. ΘΕΜΑ_4_15015

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x > 0$.