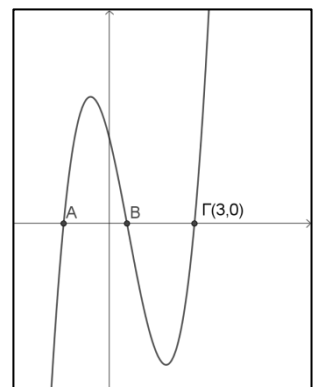


4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.
- α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 2$.
2. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ και $\delta(x) = x + 1$.
- α) Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της διαίρεσης $P(x) : \delta(x)$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.
3. Δίνεται η εξίσωση $8x^4 - 9x + 1 = 0$.
- α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.
- β) Να αποδείξετε ότι δεν έχει άλλη ακέραια ρίζα.
4. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$. Αν η διαίρεση $P(x) : (x - 1)$ δίνει πηλίκο $x^2 + 1$, τότε:
- α) Να αιτιολογήσετε γιατί $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$.
- β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.
5. α) Να αποδείξετε ότι: $2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $2x^3 + x^2 - x = 0$.
6. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης
- $$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + \alpha x + \beta \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ και } 4 < \beta < 8.$$
- α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί ο 3 είναι διαιρέτης του β .
- ii. Να δείξετε ότι $\beta = 6$.
- β) Αν $f(1) = -4$, να δείξετε ότι $\alpha = -8$.
- γ) Αν $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 6$, να δείξετε ότι $f(x) = (x - 3)(2x^2 + 2x - 2)$.
- δ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων A και B.



7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 + \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P(-1) = 6$ και $P(2) = 12$.

α) i. Να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι λύσεις του συστήματος
$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 7 \\ 2\alpha + \beta = -8 \end{cases}$$

ii. Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β .

β) Αν $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(x + 2)(2x^2 - 3x + 1) < 0$.

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$.

α) Να δείξετε ότι το $P(x)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (2x + 1)$ και να δείξετε ότι $P(x) = (2x + 1)(x^2 + 1)$.

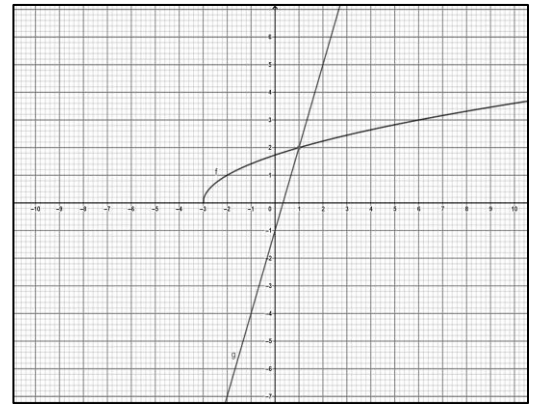
γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

9. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και $g(x) = 3x - 1$.

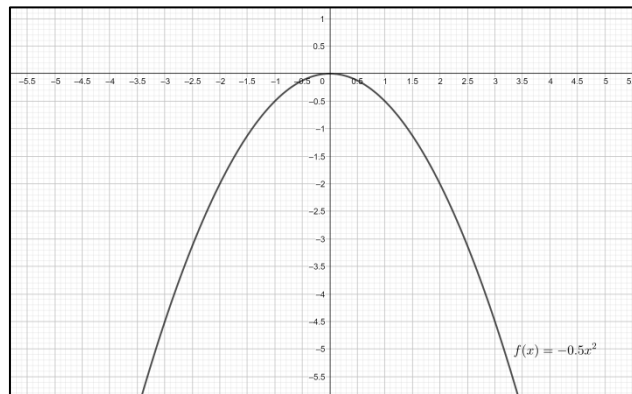
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f και g .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.



10. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -0,5x^2$, $x \in \mathbb{R}$.



α) i. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = -0,5x^2$						
$g(x) = -0,5x^2 + 1$						

ii. Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -0,5x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

iii. Να βρείτε με ποια μετατόπιση η γραφική παράσταση της f θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της g .

β) i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα αριστερά.

ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων g και h .

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x + \lambda$. Αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι το $\lambda = -1$,

β) να αποδείξετε ότι $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$,

γ) να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

12. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (2x + 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

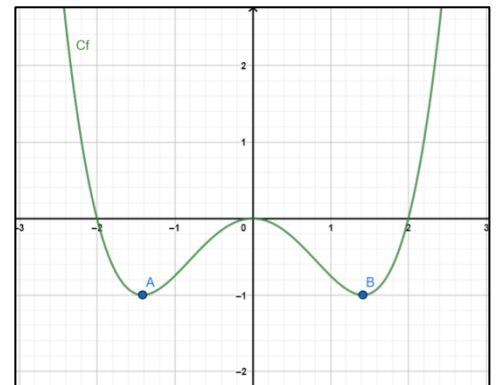
γ) Αν $P(x) = (2x + 1)(x^2 + 1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

13. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$, με $x \in \mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γραφικά γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Αν η τετμημένη του σημείου A είναι $-\sqrt{2}$ να βρείτε το είδος του (ολικού) ακρότατου, τις θέσεις που το αποκτά και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$, με όποιο τρόπο θέλετε (αλγεβρικό ή γραφικό).



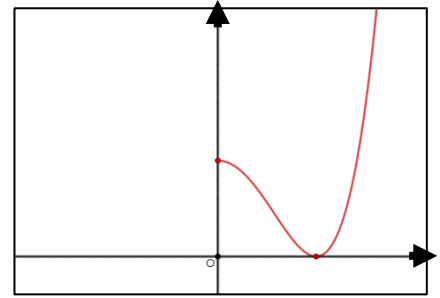
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + ax^2 + \beta, x \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(-1, 0)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $a = 0$ και $\beta = -1$.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

15. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^4 - 2x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι άρτια.

α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα στο οποίο δίνεται η γραφική παράσταση της $P(x)$ για $x \geq 0$. Να συμπληρώσετε το σχήμα με την γραφική παράσταση της $P(x)$ για $x < 0$.



β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός μηδέν είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $P(x)$. Για ποιες τιμές του x επιτυγχάνεται αυτή η ελάχιστη τιμή;

16. Η διαίρεση $P(x):(x+2)$ είναι τέλεια και έχει πηλίκο $x^2 - 4x + 3$.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

β) Να λύσετε την εξίσωση $(x+2) \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το πολυώνυμο $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του β) i. ερωτήματος.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

18. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (2 - \alpha)x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ και $Q(x) = x^3 - 3x^2 + (\alpha^2 + 3)x - 2$.

α) Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

β) Για $\alpha = 1$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Για $\alpha = 1$ να εξετάσετε αν το $x + 1$ είναι παράγοντας του $Q(x)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

19. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο το οποίο όταν διαιρείται με το $x^2 + x + 2$ δίνει πηλίκο $x - 2$ και υπόλοιπο $-2x + 4$.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2 + x + 2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

γ) Να αποδείξετε ότι το πηλίκο $\frac{P(x)}{x}$ ($x \neq 0$) είναι ίσο με ένα τριώνυμο και κατόπιν να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{P(x)}{x} < 0.$$

20. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πολυωνύμου $P(0)$ και $P(-1)$.

β) Ποιος από τους αριθμούς 0 και -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

21. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x+1$.

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, ή με όποιο άλλο τρόπο μπορείτε, να αποδείξετε ότι:

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x+2)$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

22. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 - (\beta + 2)x + 6$ και το τριώνυμο $x^2 - x - 6$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

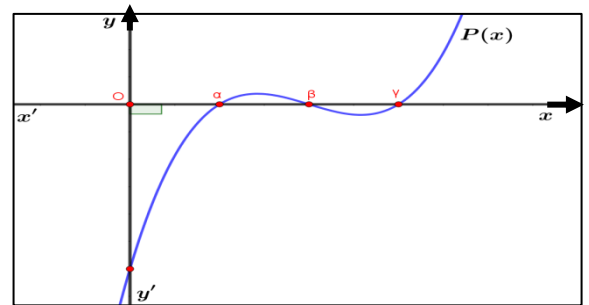
β) Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα κάθε παράγοντα του τριωνύμου, τότε:

i. να αιτιολογήσετε γιατί $P(3) = P(-2) = 0$,

ii. να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 3$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

23. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $x \in \mathbb{R}$ και έστω α , β και γ οι τετμημένες των σημείων στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση τον άξονα x' .



α) Να αποδείξετε ότι $P(3) = 0$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να βρείτε, με αιτιολόγηση, τα α , β και γ .

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

24. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(x-2)(x^2 - 2x - 3) > 0$.

25. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.
- α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
- γ) Αν $P(x) = (x-1)(x-2)(x+1)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.
26. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = x^2 + 1$.
- β) Να βρείτε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της $g(x)$.
- γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_g με τη γραφική παράσταση της $h(x) = x^3 + x$.
27. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε:
- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 6$.
- β) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
28. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - x^2 - \lambda x + 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, του οποίου το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x-1$ είναι 3.
- α) Να βρείτε την τιμή του λ .
- β) Για $\lambda = 1$:
- i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να αποδείξετε ότι $P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$,
- ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3$.
29. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + \lambda x - 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $x+1$.
- α) Να βρείτε την τιμή του λ .
- β) Για $\lambda = 3$:
- i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα και το $x-2$ και ότι $P(x) = (x-2)(x+1)(x-1)^2$,
- ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
30. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα το 1.
- α) Να βρείτε την τιμή του α .
- β) i. Για $\alpha = 2$, να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να δείξετε ότι $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$,
- ii. Για $\alpha = 2$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

31. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3$ και $g(x) = 4x$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Από τη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή και γνησίως μονότονη. Ποιο το είδος της μονοτονίας της;

β) Να λύσετε γραφικά ή αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

