

5.2 Λογάριθμοι

1.

α) Να αποδείξετε ότι $\log 1000 = 3$.

β) Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $\Sigma = 3 \cdot \log 5 + \log 72 - \log 9$.
2. Δίνεται ο αριθμός $A = 10^{\log 5} - e^{\ln 3}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = 2$,

β) $0 < \ln A < 1$.

Δίνεται ότι $e \approx 2.71$.
3. Δίνεται ο αριθμός $A = \ln e + \ln e^2$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = 3$,

β) $\ln A > 1$.

Δίνεται ότι $e \approx 2.71$.
4. Δίνεται ο αριθμός $A = \log 10 + \log 100 + \log 10^6$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = 9$,

β) $0 < \log A < 1$.
5. Δίνεται η παράσταση $A = \log 4 + 2 \log 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 2$.

β) Να βρείτε την τιμή του $\log \frac{A}{2}$.
6. Δίνεται η παράσταση $A = \ln e^2 - \ln \sqrt{e}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \frac{3}{2}$.

β) Να βρείτε την τιμή του $\ln \left(\frac{2}{3} \cdot A \right)$.
7.

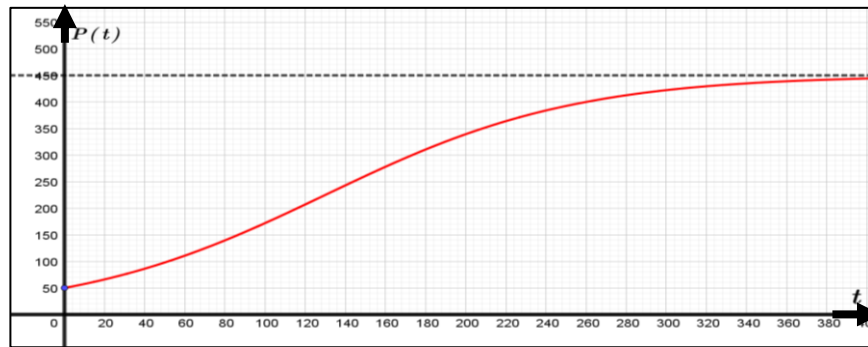
α) Να αποδείξετε ότι $\log 27 + \log 3 = \log 81$.

β) Να αποδείξετε ότι $\log 27 + \log 3 = 4 \log 3$.
8.

α) Να αποδείξετε ότι $\log 10 - \log 2 = \log 5$.

β) Να αποδείξετε ότι $\log 8 + \log 2 = 4 \log 2$.

9. α) Να αποδείξετε ότι $\log 0,01 = -2$.
- β) Να αποδείξετε ότι $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = -\log 0,01$.
10. Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 4 + 4\log 5$.
- α) Να αποδείξετε ότι $A = 4$.
- β) Για ποια τιμή του αριθμού $x \neq 0$ ισχύει $\ln x^2 = \frac{A}{2}$.
11. Δίνεται ότι μία προσεγγιστική τιμή για τον δεκαδικό λογάριθμο $\log 2$ είναι το 0,30. Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες των λογαρίθμων: $\log \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log \theta_1 - \log \theta_2$ και $\log \theta^k = k \log \theta$ για να βρείτε μία προσεγγιστική τιμή για τους δεκαδικούς λογάριθμους:
- α) $\log 4$ β) $\log 5$
12. Θεωρούμε τον αριθμό $p = \log 4 + 2 \cdot \log 5$.
- α) Να αποδείξετε $\log 4 = 2 \log 2$ και στη συνέχεια ότι $p = 2$.
- β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε $\ln x = p$.
13. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 2$ και $\beta = \log 5$.
- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 1$.
- β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\ln(\alpha + \beta)$.
14. α) Να λύσετε το σύστημα: $(\Sigma): \begin{cases} 2\omega + 3\varphi = 17 \\ 4\omega - 3\varphi = 7 \end{cases}$
- β) Αν η λύση του συστήματος (Σ) είναι $(\omega, \varphi) = (4, 3)$ και $\ln x = \omega$, $\ln y = \varphi$, να βρείτε τους αριθμούς x και y .
15. Ο αριθμός των διαφορετικών ειδών των έμβιων όντων που υπάρχουν στις Μεγάλες Λίμνες της Β. Αμερικής, δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση $P(t) = \frac{450}{1 + 8 \cdot e^{-0,016t}}$ μετά t χρόνια από το έτος 1900. Θεωρούμε ότι η μεταβλητή t παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές.
- α) Να βρείτε πόσα είδη έμβιων όντων υπήρχαν το έτος 1.900 .
- β) Να βρείτε, προσεγγιστικά, ποιο έτος θα υπάρχουν περίπου 225 διαφορετικά είδη.
- γ) Στο παρακάτω σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(t)$. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τη μονοτονία της $P(t)$. Από ποια τιμή θα είναι πάντα μικρότερες οι τιμές $P(t)$;
- Δίνεται ότι $\ln 8 \approx 2,08$.



16. Ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο για το πλήθος των ανθρώπων σε μια μαθητική κοινότητα που έχουν ακούσει μια συγκεκριμένη φήμη, περιγράφεται από την ισότητα $N = P \cdot (1 - e^{-0,15k})$, όπου P ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας και k είναι ο αριθμός των ημερών που έχουν περάσει από τότε που ξεκίνησε η φήμη. Υποθέτουμε ότι ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας είναι 1.000 άνθρωποι.
- α) Να βρείτε πόσα μέλη της μαθητικής κοινότητας θα έχουν ακούσει τη φήμη μετά από 20 ημέρες.
- β) Πόσες ημέρες θα περάσουν ώστε να έχουν ακούσει τη φήμη 450 άνθρωποι από τους 1.000 ;
- γ) Είναι δυνατόν να ακούσουν τη φήμη όλα τα μέλη της κοινότητας; Εξηγήστε.
- Δίνονται: $e^3 \approx 20$ και $\ln(0,55) \approx -0,6$.