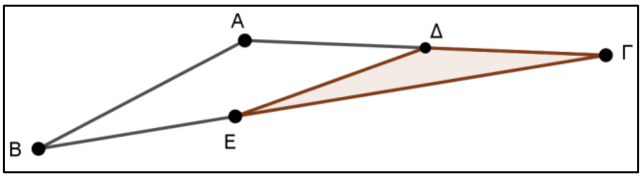
10.5 Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων – πολυγώνων

1. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, με $ΑΒ = 4$, $ΑΓ = 6$ και $\hat{Α} = 150^{o}$. Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της ΑΓ και το Ε είναι σημείο της ΒΓ ώστε $ΓΕ = \frac{2}{3}ΓΒ$, τότε να υπολογίσετε:



α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται: $ημ150^{o} = \frac{1}{2}$.

β) το λόγο $\frac{(ΓΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$.

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ .

2. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει μήκη πλευρών $α = 17$, $β = 8$, $γ = 15$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ:

i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους $λ$.

ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)}$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με μήκη πλευρών $ΑΒ = 6$, $ΑΓ = 8$ και $ΒΓ = 10$.

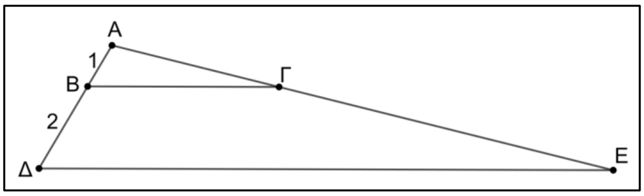
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $λ = \frac{3}{4}$.

ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)}$.

4. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = 1$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στη ΒΓ και $ΒΔ = 2$.

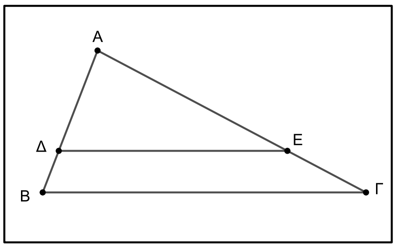


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΔΕ .

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

5. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=\sqrt{2}$. Από σημείο Δ της πλευράς ΑΔ ώστε $A\Delta=1$, φέρνουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε .



α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ,

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 2 , να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου ΑΔΕ και του τραπεζίου ΒΓΕΔ.

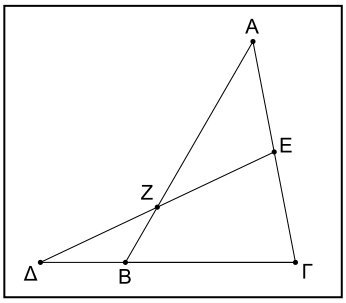
6. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AB\Gamma)=(A\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$,

β) $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{4}$,

γ) $(BMN)=\frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta)$.

7. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma=8$. Στην προέκταση της ΓΒ προς το Β παίρνουμε σημείο Δ, ώστε $\Delta B=4$ και Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

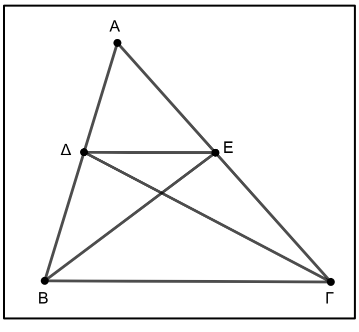


α) Να αποδείξετε ότι: $(AB\Gamma)=4A\Gamma\cdot \eta\mu\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι: $(\Gamma\Delta E)=3A\Gamma\cdot \eta\mu\Gamma$.

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΔΕ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, αν το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ είναι 12 τ.μ.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.



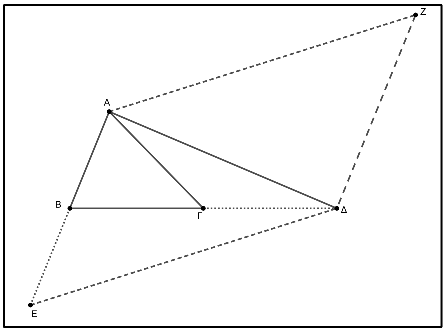
α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta EB)}=\frac{A\Delta}{\Delta B}$ και $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta E\Gamma)}=\frac{AE}{E\Gamma}$.

β) Να αποδείξετε ότι $(\Delta EB)=(\Delta E\Gamma)$.

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \mathrm{B}\Gamma$ και την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα $\mathrm{BE} = \mathrm{AB}$.

α) Αν $(\mathrm{AB}\Gamma) = 25\ \mathrm{m}^2$, να αποδείξετε ότι $(\mathrm{B}\Delta\mathrm{E}) = 50\ \mathrm{m}^2$.

β) Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΕΔ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην ΕΑ που τέμνονται στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΔ είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

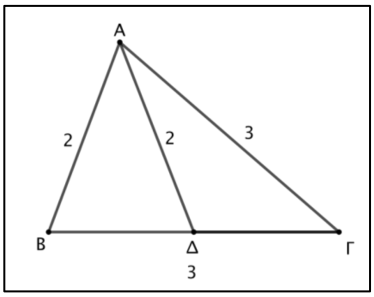


10. Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή με $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{B}\Gamma = 3$ και $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Delta = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ είναι ίσες.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι όμοια.

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\dfrac{(\mathrm{AB}\Gamma)}{(\mathrm{B}\Delta\mathrm{A})}$ των εμβαδών των δύο τριγώνων.

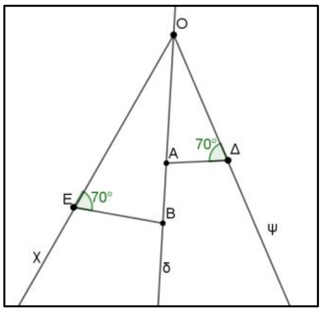


11. Δίνεται γωνία $\chi\hat{\mathrm{O}}\psi$ και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στην Οδ παίρνουμε τυχαία σημεία Α και Β. Θεωρούμε σημείο Ε στην πλευρά Οχ τέτοιο ώστε $\mathrm{O}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 70^{\mathrm{o}}$ και σημείο Δ στην Οψ τέτοιο ώστε $\mathrm{O}\hat{\Delta}\mathrm{A} = 70^{\mathrm{o}}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια.

β) Αν $\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.

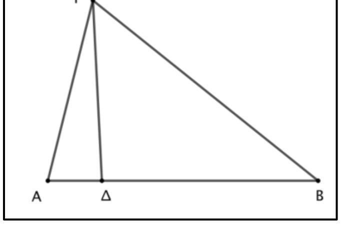
γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΕΒ.



12. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ.

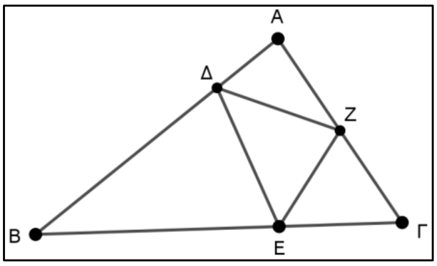
α) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{(\mathrm{AB}\Gamma)}{(\Delta\mathrm{B}\Gamma)} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{B}}$.

β) Αν $(\mathrm{AB}\Gamma) = 25$ και $\mathrm{AB} = 5\mathrm{A}\Delta$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.



13. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε: $\mathrm{A}\Delta = \dfrac{1}{4}\mathrm{AB}$, $\mathrm{BE} = \dfrac{2}{3}\mathrm{B}\Gamma$ και $\Gamma\mathrm{Z} = \dfrac{1}{2}\mathrm{A}\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\mathrm{A}\Delta\mathrm{Z}) = \dfrac{1}{8}(\mathrm{AB}\Gamma)$, $(\mathrm{BE}\Delta) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{AB}\Gamma)$, $(\Gamma\mathrm{EZ}) = \dfrac{1}{6}(\mathrm{AB}\Gamma)$.



β) $(\Delta EZ)=\dfrac{5}{24}(AB\Gamma)$.

14. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρά $B\Gamma=9$ και αντίστοιχο ύψος $A\Delta=8$.

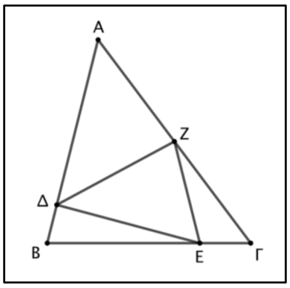
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .

β) Ένα άλλο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ και η ομόλογη πλευρά της ΒΓ είναι η $B'\Gamma'=6$. Να υπολογίσετε:

i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $A'B'\Gamma'$.

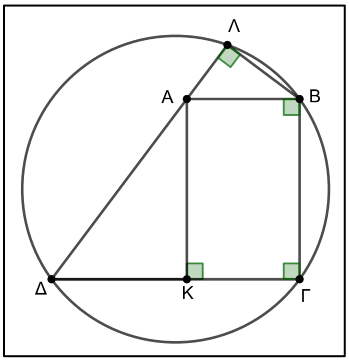
15. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε: $\Delta B=\dfrac{1}{5}AB$, $E\Gamma=\dfrac{1}{4}B\Gamma$, $Z\Gamma=\dfrac{1}{2}A\Gamma$.



α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\dfrac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}, \dfrac{(E\Gamma Z)}{(ZB\Gamma)}, \dfrac{(Z A\Delta)}{(AB\Gamma)}$.

β) Αν είναι $(AB\Gamma)=120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ.

16. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{B}=\hat{\Gamma}=90^o$ και $B\Gamma=16$, $\Gamma\Delta=22$ και $A\Delta=20$. Έστω Κ η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ΓΔ και Λ η προβολή του σημείου Β πάνω στη ευθεία ΑΔ .



α) Να αποδείξετε ότι:

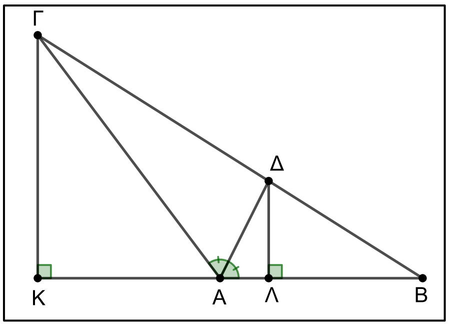
i. $K\Delta=12$,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ είναι 96 ,

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΛΑ .

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ .

17. Στο σχήμα, η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και η ΑΚ είναι η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ευθεία ΑΒ. Δίνονται $AB=10$, $A\Gamma=15$ και $AK=9$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma K=12$ και $(AB\Gamma)=60$.

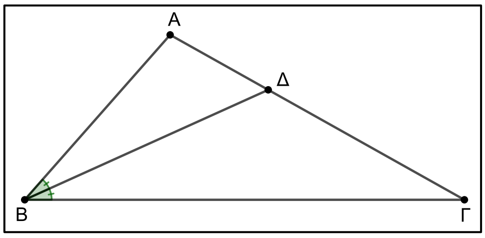
ii. $(A\Delta B)=24$ και $(A\Delta\Gamma)=36$.

β) Έστω Λ η προβολή του σημείου Δ πάνω στην ευθεία ΑΒ .

i. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\Delta\Lambda}{\Gamma K}=\dfrac{2}{5}$.

ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{ΛΒ}{ΛΚ}$ στον οποίο το σημείο Λ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΒΚ .

18. Στο σχήμα, η ΒΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και επίσης είναι $ΒΓ = 2ΑΒ$.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΔ.

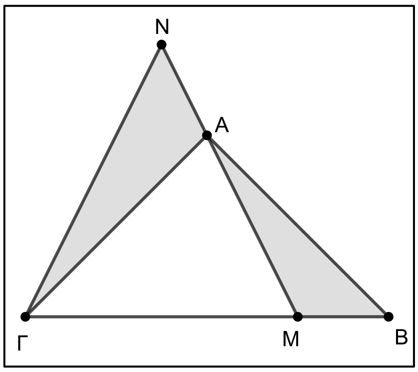
β) Να χωρίσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα.

γ) Έστω ότι $ΑΒ = 12$ και $ημΒ = \frac{3}{4}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 108 .

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΔΒΓ και ΑΒΔ .

19. Το σημείο Μ διαιρεί εσωτερικά την πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο $\frac{ΜΒ}{ΜΓ}$ και το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ σε λόγο $\frac{ΝΑ}{ΝΜ}$.

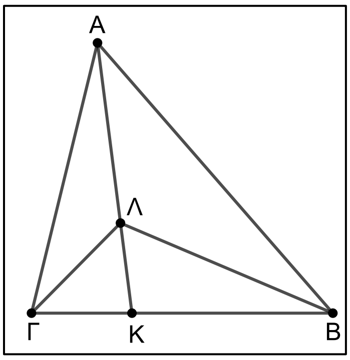


α) Έστω $\frac{ΜΒ}{ΜΓ} = \frac{1}{3}$ και $\frac{ΝΑ}{ΝΜ} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{(ΑΜΒ)}{(ΑΜΓ)} = \frac{1}{3}$, **ii.** $\frac{ΝΑ}{ΑΜ} = \frac{1}{3}$, **iii.** $(ΑΜΒ) = (ΑΝΓ)$.

β) Έστω $\frac{ΜΒ}{ΜΓ} = 1$ και $(ΑΜΒ) = (ΑΝΓ)$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{ΝΑ}{ΝΜ}$ στον οποίο το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ.

20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Κ ώστε $ΚΒ = 2ΚΓ$ και στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ παίρνουμε σημείο Λ ώστε $ΛΑ = 2ΛΚ$. Έστω $Ε_1, Ε_2, Ε_3$ και $Ε_4$ τα εμβαδά των τριγώνων ΑΛΓ, ΓΛΚ , ΒΛΚ και ΑΛΒ αντίστοιχα.

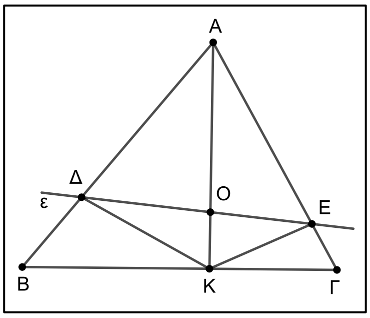


α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{Ε_1}{Ε_2} = 2$ και $\frac{Ε_4}{Ε_3} = 2$, **ii.** $Ε_1 = Ε_3$.

β) Αν $Ε_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .

21. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το εσωτερικό σημείο Κ της πλευράς ΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΚ, ώστε $ΑΟ = \frac{3}{4}ΑΚ$. Από το Ο φέρνουμε ευθεία $(ε)$ η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

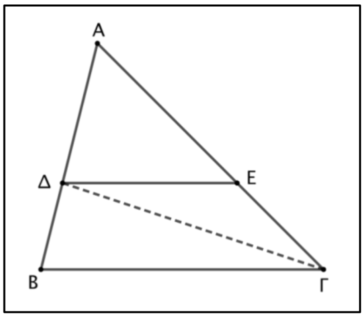


α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(\text{ΑΟΔ})=\frac{3}{4}(\text{ΑΚΔ})$, **ii.** $(\text{ΑΟΕ})=\frac{3}{4}(\text{ΑΚΕ})$, **iii.** $(\text{ΑΔΕ})=\frac{3}{4}(\text{ΑΔΚΕ})$.

β) Είναι δυνατόν να ισχύει $(\text{ΑΔΕ})=\frac{3}{4}(\text{ΑΒΓ})$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

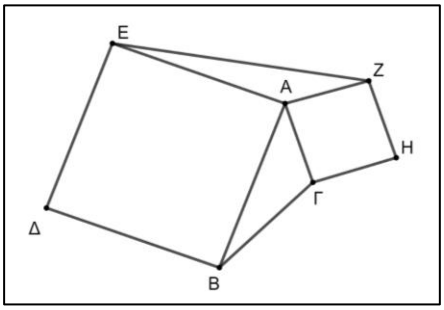


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ.

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(\text{ΔΕΓ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{2}{9}$.

23. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}=6\text{ cm}$ και $\text{ΑΓ}=3\text{ cm}$ και $\hat{\text{Α}}$ οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΗΖ και φέρνουμε την ΕΖ, όπως στο σχήμα.



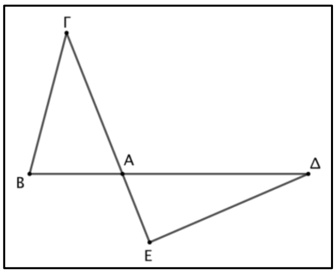
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΕΖΗΓΒΔ είναι $(\text{ΕΖΗΓΒΔ})=54\text{ cm}^2$:

i. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{\text{Α}}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{\text{Α}}=30^\circ$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

24. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

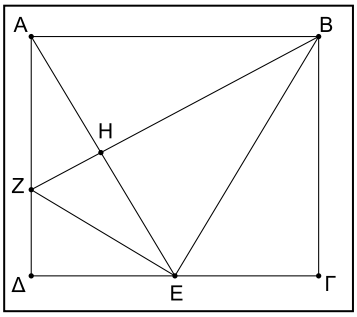


α) Αν είναι $\text{ΑΔ}=2\text{ΑΒ}$ και $\text{ΑΕ}=\frac{1}{2}\text{ΑΓ}$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα είναι $\text{ΑΔ}=\mu\cdot\text{ΑΒ}$ και $\text{ΑΕ}=\nu\cdot\text{ΑΓ}$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ να είναι ισοδύναμα;

γ) Αν είναι $\text{ΑΓ}=\frac{3}{2}\text{ΑΒ}$ και $\text{ΑΔ}=2\text{ΑΒ}$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του Ε ώστε τα ΑΒΓ και ΑΔΕ να είναι όμοια.

25. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε $AZ=\frac{3}{4}AB$.



α) Να αποδείξετε ότι $BZ=\frac{5}{4}AB$.

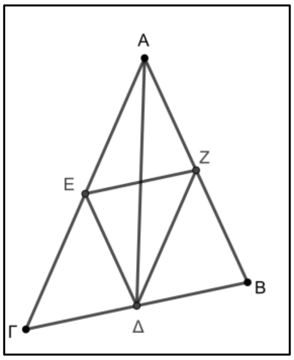
β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $BE^2=\frac{5}{4}AB^2$ και $ZE^2=\frac{5}{16}AB^2$,

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους.

26. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα.



α) Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και το μέσο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

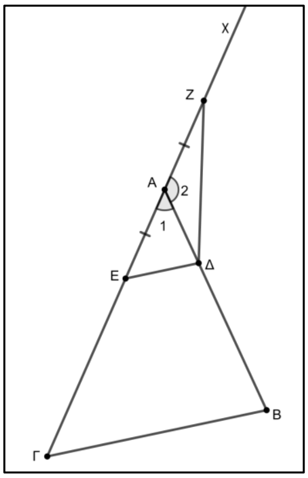
i. τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$,

ii. για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι $(ΑΕΔΖ)=(ΑΒΓ)-2(ΕΔΓ)$,

iii. το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ;

27. Έστω Ε σημείο στην πλευρά ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του ΑΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Ζ στην προέκταση Αχ της πλευράς ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε να είναι $AZ=AE$, όπως στο σχήμα.



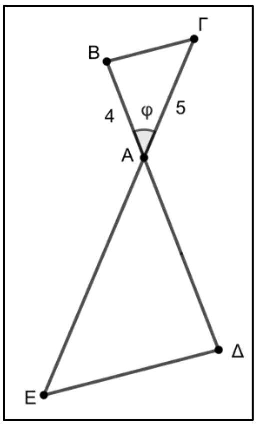
α) Έστω $AΓ=3AE$. Να αποδείξετε ότι:

i. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AE}{AΓ}$.

28. Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έχει τα άκρα του Β και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΔΕ, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔΕ. Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, $\text{ΑΒ} = 4$ και $\text{ΑΓ} = 5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\dfrac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΔΕ})} = \dfrac{1}{4}$.

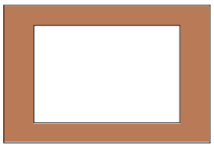


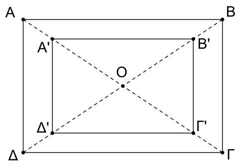
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο $\dfrac{1}{2}$.

β) Αν $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} = \varphi$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΑΔΕ) του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με $40\eta\mu\varphi$.

γ) Να βρείτε σημείο Ζ εσωτερικό της πλευράς ΑΔ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΖ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\dfrac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΕ.

29. Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο Ο. Το ορθογώνιο $\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}'\text{Δ}'$ έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.





α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο $\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}'\text{Δ}'$.

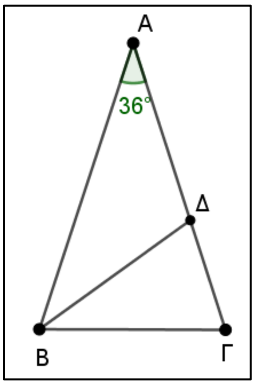
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και $\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}'$ είναι όμοια.

γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της. Η διαγώνιος ΑΓ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Β} = 120^\circ$.

i. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας;

ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας;

30. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$, $\hat{\text{Α}} = 36^\circ$.



α) Αν η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Β}}$, να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια,

ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της ΑΓ. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\dfrac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΔΒΓ})} = 3$.

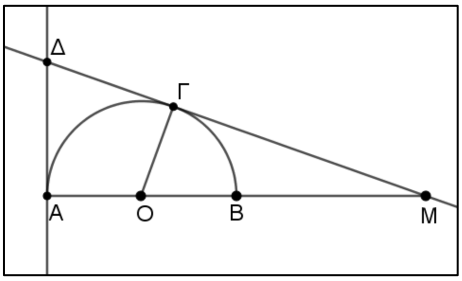
31. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσός του και το σημείο Ε είναι το μέσο της ΑΜ. Από το Ε φέρουμε παράλληλες στις ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Δ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\text{AMB})=(\text{AMΓ})$,

β) $(\text{MEΔ})=\frac{1}{8}(\text{ABΓ})$,

γ) $(\text{ABΔE})=(\text{AΓZE})$.

32. Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου $\text{AB}=2\rho$. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Μ. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση της ΜΓ στο Δ τότε:

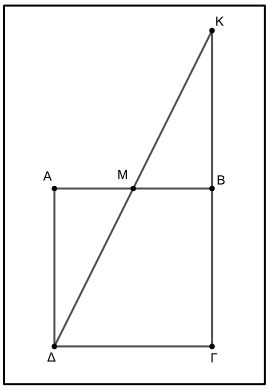


α) Αν $\text{BM}=2\rho$ να αποδείξετε ότι $\text{MΓ}=2\sqrt{2}\rho$.

β) **i.** Να αποδείξετε ότι $\frac{\text{MO}}{\text{MΓ}}=\frac{\text{MΔ}}{\text{MA}}$.

ii. Αν για το Μ ισχύει ότι $\text{BM}=\lambda\cdot\rho$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, τέτοια ώστε $(\text{AΔM})=9(\text{MOΓ})$.

33. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ. Να αποδείξετε ότι:



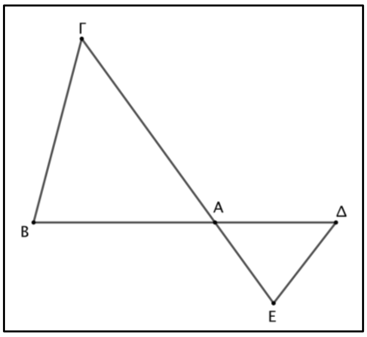
α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια.

β) $(\text{MKB})=\frac{1}{4}(\text{ΔKΓ})$,

γ) $(\text{MBΓΔ})=\frac{3}{4}(\text{ABΓΔ})$,

δ) Αν $(\text{MBΓΔ})=75\ \text{m}^2$, να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.

34. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν είναι $\text{AΔ}=\frac{1}{2}\text{AB}$ και $\text{AE}=\frac{2}{5}\text{AΓ}$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(\text{AΔE})}{(\text{ABΓ})}$.

β) Αν είναι $\text{AΔ}=\frac{1}{\lambda}\text{AB}$ και $\text{AE}=\frac{\lambda}{\mu}\text{AΓ}$, όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(\text{AΔE})}{(\text{ABΓ})}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ.

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(\text{AΔE})=(\text{ABΓ})$». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

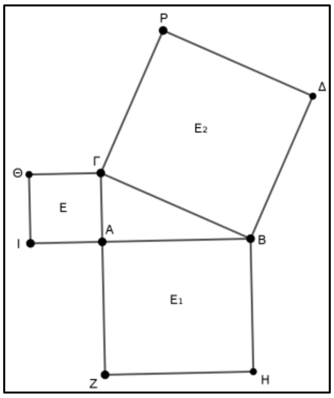
35. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος ΒΓ. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Η παράλληλη στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\text{ΕΚΔ}) = \dfrac{(\text{ΒΕΔ})}{2}$,

β) $(\text{ΕΖΔ}) = \dfrac{(\text{ΑΕΔΖ})}{2}$,

γ) το εμβαδόν του ΚΕΖΛ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ .

36. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με πλευρές τις ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ, τα τετράγωνα ΑΒΗΖ, ΑΓΘΙ, ΒΓΡΔ. Έστω $\text{Ε}, \text{Ε}_1, \text{Ε}_2$, τα εμβαδά των τετραγώνων ΑΓΘΙ, ΑΒΗΖ, ΒΓΡΔ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $\text{Ε}_1 = 4\text{Ε}, \text{Ε}_2 = 5\text{Ε}$ τότε:

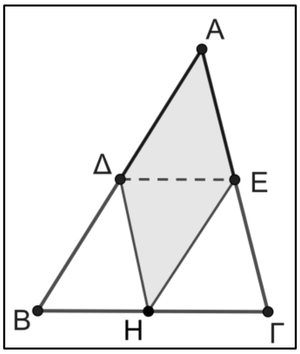


α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{\text{Α}}$.

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΙΖ, ΒΗΔ, ΓΡΘ είναι ίσα.

γ) αν η $\text{ΑΓ} = 1$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου ΖΗΔΡΘΙ.

37. Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.



α) Έστω ότι $\dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \dfrac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \dfrac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\dfrac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν γνωρίζετε ότι $\dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \dfrac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ και του τριγώνου ΑΒΓ;

38. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε $\text{ΓΕ} = \dfrac{1}{4}\text{ΓΑ}$.

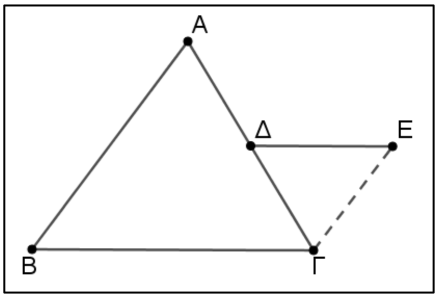
α) Αν Δ σημείο της ΑΒ τέτοιο ώστε $\text{ΑΔ} = \dfrac{1}{3}\text{ΑΒ}$:

i. Να αποδείξετε ότι $(\text{ΑΒΓ}) = 4(\text{ΑΔΕ})$.

ii. Αν από τα Ε και Γ φέρουμε τις κάθετες ΕΖ και ΓΗ προς την ΑΒ, να υπολογίσετε τον λόγο $\dfrac{\text{ΕΖ}}{\text{ΓΗ}}$.

β) Θεωρώντας ότι το Ε παραμένει ακίνητο, ενώ το Δ κινείται στο εσωτερικό της ΑΒ, να βρείτε σε ποιο σημείο πρέπει να βρεθεί το Δ ώστε $(\text{ΑΒΓ}) = 2(\text{ΑΔΕ})$.

39. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ μέσο της ΑΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ παράλληλη στην ΒΓ και ίση με το μισό της ΑΒ όπως στο σχήμα.



α) **i.** Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{(\text{ΔΕΓ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \dfrac{\text{ΔΕ}}{2\text{ΒΓ}}$.

ii. Αν το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι $(\text{ΔΕΓ}) = (\text{ΑΒΔ})$.

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\dfrac{(\text{ΔΕΓ})}{(\text{ΑΒΓ})}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\dfrac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ}} = \dfrac{\text{ΔΕ}}{\text{ΑΒ}} = \dfrac{1}{2}.$ Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους $\hat{\Delta}, \hat{\Gamma}$ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. $\dfrac{(\text{ΔΕΓ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \left(\dfrac{\text{ΔΕ}}{\text{ΑΒ}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$». Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;