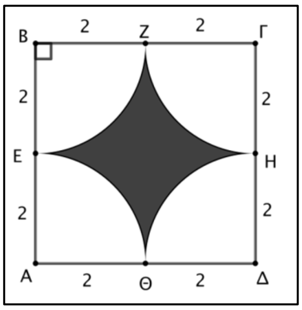
11.7 Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

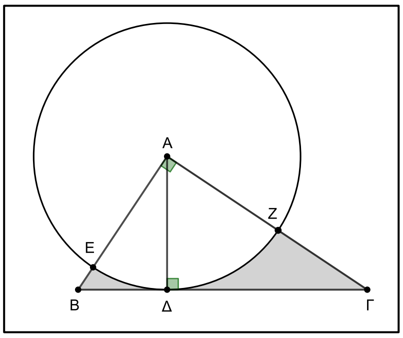
1. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha = 4$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι ίσο με $\mathrm{E} = 4(4-\pi)$.

2. Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει υποτείνουσα $\mathrm{B\Gamma} = 13$ και αντίστοιχο ύψος $\mathrm{A\Delta} = 6$. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΔ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.



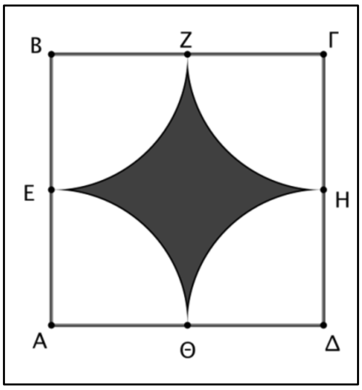
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

i. του κυκλικού τομέα Α ΕΔΖ,

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

3. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα α σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

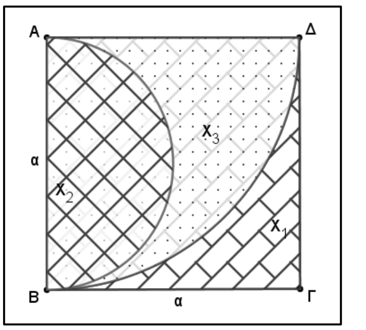


α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του α.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι $\mathrm{E} = \alpha^2(4-\pi)$.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.

4. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α του διπλανού σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.



α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με:

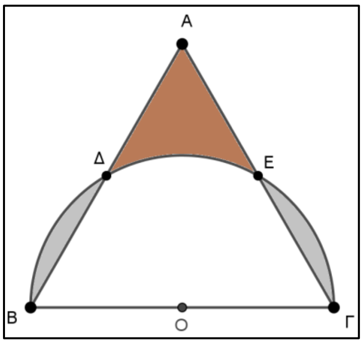
$$(\mathrm{X}_1) = \frac{\alpha^2}{4}\cdot(4-\pi).$$

β) Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν

X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3.

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 και X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, πλευράς 2α. Με διάμετρο τη ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα. Αν Ο είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

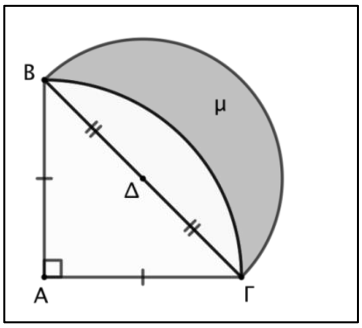


α) $\Delta\Gamma = \alpha\sqrt{3}$.

β) το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με $E = \dfrac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\alpha^2}{6}$.

γ) το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΑΕ και το τόξο ΔΕ είναι: $E' = \dfrac{\left(3\sqrt{3} - \pi\right)\alpha^2}{6}$.

6. Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $B\Gamma = 2\rho$. Με διάμετρο ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα $A\overset{\frown}{B\Gamma}$ με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

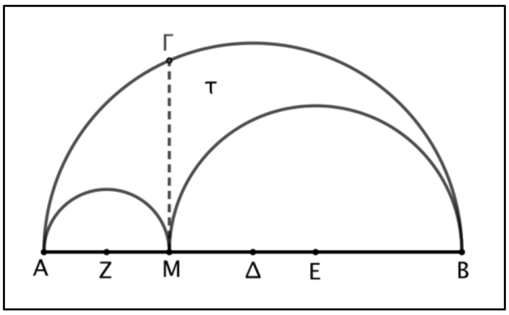


α) Να αποδείξετε ότι $AB = \rho\sqrt{2}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του ρ.

γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Τι συμπέρασμα προκύπτει;

7. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τυχαίο σημείο του Μ, τέτοιο ώστε $AM = 2\alpha$ και $MB = 2\beta$. Με διαμέτρους ΑΜ, ΜΒ και ΑΒ γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου ΑΒ και της κάθετης από το Μ στο ΑΒ.



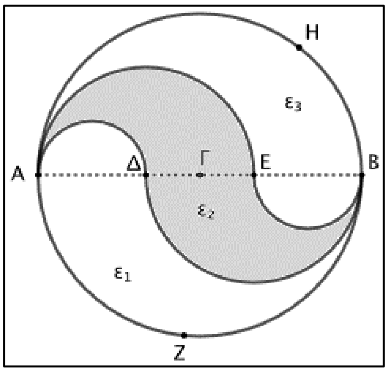
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια (Z, AM), (E, MB) και (Δ, AB), όπου Ζ, Ε, Δ είναι τα μέσα των ΑΜ, ΜΒ και ΑΒ αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου ΜΓ.

δ) Για ποια θέση του Μ μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ;

8. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα R. Έστω ΑΒ διάμετρος του κύκλου και Δ, Ε σημεία της τέτοια ώστε $ΑΔ = ΔΕ = ΕΒ$. Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια ΑΔ και ΑΕ πάνω από τη διάμετρο ΑΒ και τα ημικύκλια ΒΕ και ΒΔ κάτω από τη διάμετρο ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

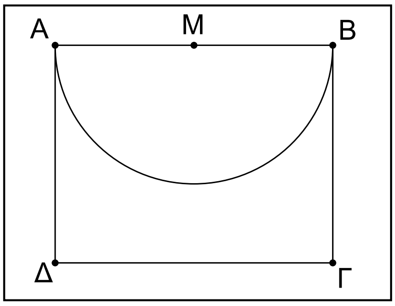


α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά $ε_1$ και $ε_3$ των καμπυλόγραμμων σχημάτων ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $ε_2$ του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος ΑΔΒΕ.

γ) Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

9. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $ΑΒ = 4α$ και $ΑΔ = πα$. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ.



α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

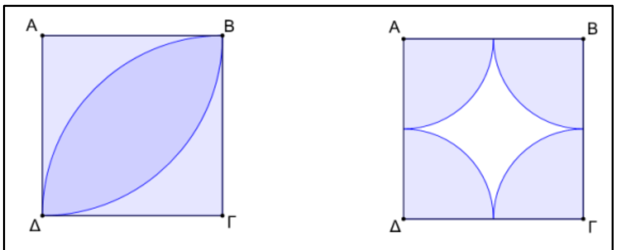
β) Αν η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε και Μ είναι το μέσο της ΑΒ,

i. να αποδείξετε ότι $AB^2 = BΔ \cdot BE$ και $AΔ^2 = BΔ \cdot ΔE$,

ii. να αποδείξετε ότι $BE = \dfrac{16α}{\sqrt{16+π^2}}$ και $ΔE = \dfrac{π^2 α}{\sqrt{16+π^2}}$,

iii. να υπολογίσετε το $συν\left(B\hat{M}E\right)$.

10. Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.



Σχήμα 1 Σχήμα 2

α) Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές Α, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25π\ m^2$.

ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(π-2)\ m^2$.

β) Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5 m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

i. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται.

ii. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5 m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα **α).**

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο $(\mathrm{O,R})$ με $\mathrm{AB}=\gamma$, $\mathrm{A\Gamma}=\beta$ και $\mathrm{B\Gamma}=\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

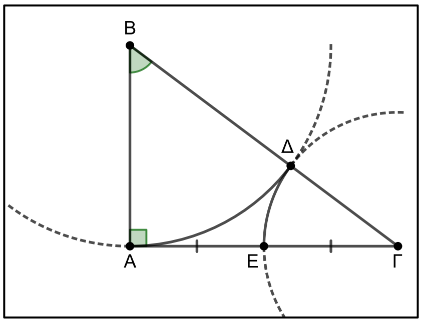
α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{\mathrm{A}}>90^{\circ}$.

β) η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με 120°. Δίνεται $\sigma\upsilon\nu 120^{\circ}=-\dfrac{1}{2}$.

γ) η γωνία $\mathrm{B\hat{O}\Gamma}$ ισούται με 120°.

δ) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή ΒΓ και το κυρτογώνιο τόξο ΒΓ, είναι: $\mathrm{E}=\dfrac{\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)\mathrm{R}^2}{12}$. Δίνεται $\eta\mu 120^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=90^{\circ}$. Με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα $\mathrm{R}=\mathrm{BA}$ γράφουμε τον κύκλο $(\mathrm{B,R})$ ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα $\rho=\Gamma\Delta$ γράφουμε τον κύκλο (Γ,ρ) ο οποίος τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Έστω ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ .



α) Να αποδείξετε ότι $\rho=\dfrac{2}{3}\mathrm{R}$.

β) Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και E_2 το εμβαδόν του κύκλου $(\mathrm{B,R})$. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1}=\dfrac{3\pi}{2}$.

γ) Έστω $\hat{\mathrm{B}}=\mu^{\circ}$ και E_3 και E_4 είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων Β ΑΔ και Γ ΔΕ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\mathrm{E}_4}{\mathrm{E}_3}=\dfrac{4(90-\mu)}{9\mu}$.