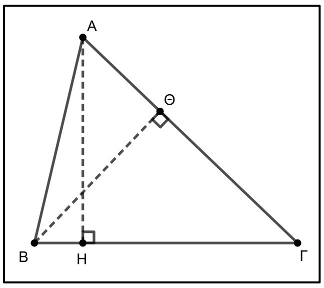
9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΗ και ΒΘ.



α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα ……. .

ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ....

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά ……. .

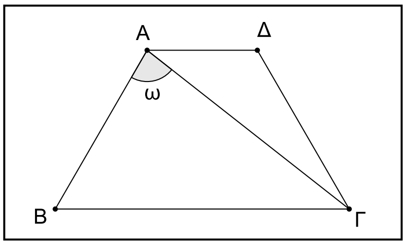
iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά …….. .

v. $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + ... - 2 \cdot \text{ΒΓ} \cdot .....$.

vi. $\text{ΒΓ}^2 = ... + \text{ΑΓ}^2 - 2 \cdot ..... \cdot \text{ΑΘ}$.

β) Αν $\text{ΑΒ} = 4$, $\text{ΒΓ} = 5$ και $\text{ΑΓ} = 6$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΘ .

2. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι $\text{ΑΔ} = 3$, $\text{ΑΒ} = \text{ΓΔ} = 5$, $\text{ΒΓ} = 8$ και $\hat{\text{Δ}} = 120^{\text{o}}$.

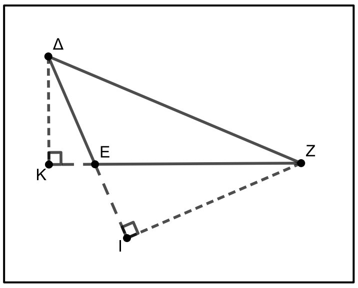


α) Να αποδείξετε ότι $\text{ΑΓ} = 7$.

β) Να αποδείξετε ότι $\text{συν}\omega = \dfrac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$.

Δίνεται ότι $\text{συν}120^{\text{o}} = -\dfrac{1}{2}$.

3. Στο τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα ύψη του ΔΚ και ΖΙ.



α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα ……. .

ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα ……. .

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά ……. .

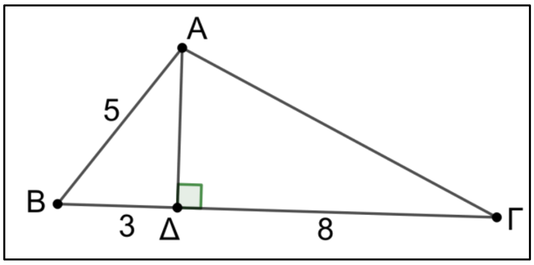
iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά …….. .

v. $\text{ΔΖ}^2 = \text{ΔΕ}^2 + ... + 2 \cdot \text{ΕΖ} \cdot .....$.

vi. $\text{ΕΖ}^2 = ... + \text{ΔΖ}^2 - 2 \cdot ..... \cdot \text{ΔΙ}$.

β) Αν $\text{ΔΕ} = 2$, $\text{ΕΖ} = 4$ και $\text{ΔΖ} = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = 5$ και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν $\text{ΒΔ} = 3$ και $\text{ΓΔ} = 8$ να αποδείξετε ότι:

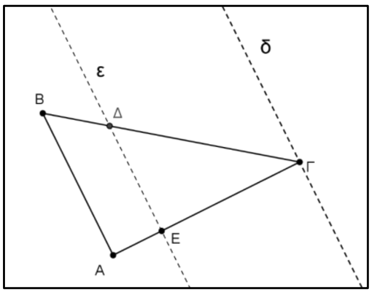


α) $\text{ΑΔ} = 4$,

β) $\text{ΑΓ} = \sqrt{80}$,

γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

5. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 9, ΓΑ = 12 και ΓΒ = 15 και ευθείες ε, δ παράλληλες στην ΑΒ, όπως αυτές του σχήματος.



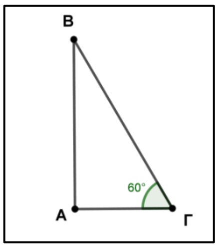
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του.

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές ΓΑ, ΓΒ σε σημεία Ε και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε ΕΑ = 4 και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ, τότε να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΔΒ,

ii. τις πλευρές του τριγώνου ΔΕΓ.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΒΓ} = 4$, $\text{ΑΓ} = 2$ και $\hat{\Gamma} = 60^{\text{o}}$.



α) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

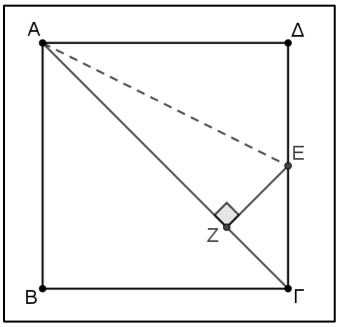
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

7. Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι : $\alpha = 7$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της.

8. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\text{ΑΓ} = \alpha\sqrt{2}$, **ii.** $\text{ΑΕ} = \alpha\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ.

9. Τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο.

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση λ%, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο.

γ) Να εξετάστε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α, 8β και 6γ.

10. Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ενός τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται ότι $AB = 9$, $A\Gamma = 12$, $A\Delta = 4$ και $AE = 3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\Gamma = 15$ (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

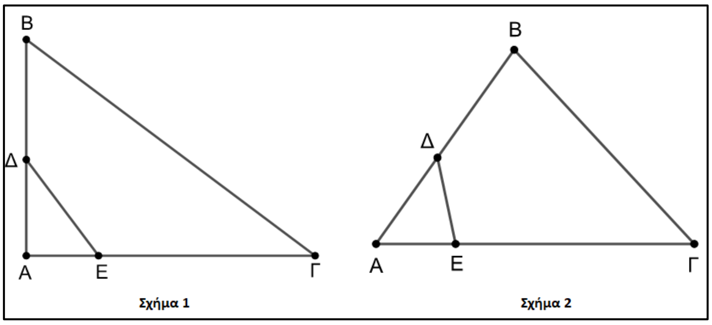
i. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο,

ii. $\Delta E = 5$.

β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\Gamma = 10$ (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.

ii. $\Delta E = \dfrac{10}{3}$.



11. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A\Delta < AB$, τη διχοτόμο της γωνίας του $\widehat{A}$ η οποία τέμνει την πλευρά του ΔΓ σε σημείο Ε και τους ισχυρισμούς:

Ισχυρισμός 1: «Το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α, Δ και Ε είναι ισοσκελές».
Ισχυρισμός 2: « Το τμήμα ΔΕ είναι ίσο με την πλευρά ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ».

α) Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παραπάνω ισχυρισμούς ως αληθή ή ψευδή, αιτιολογώντας την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

β) Ποιο θα είναι το μέτρο των γωνιών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ώστε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α, Δ και Ε να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

12. Στο σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔΕΖΗ έχει πλευρά 1.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$, **ii.** $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$.

γ) Να υπολογίστε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $A\hat{Z}\Gamma = \hat{\omega}$.