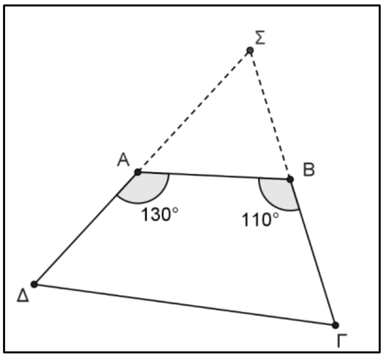
8.2 Κριτήρια ομοιότητας

1. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\Delta\hat{A}B = 130^o$ και $A\hat{B}\Gamma = 110^o$ και τις απέναντι γωνίες τους παραπληρωματικές. Έστω ότι οι απέναντι γωνίες του ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματικές και Σ το σημείο στο οποίο τέμνονται οι πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες προς τα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

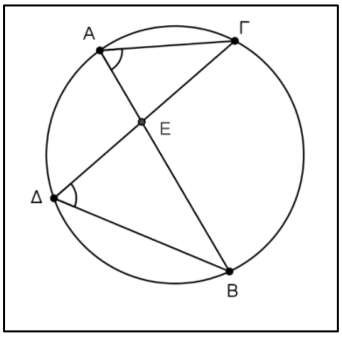


α) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 50^o$ και $\hat{\Delta} = 70^o$.

β) i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma\hat{A}B = \hat{\Gamma}$ και $\Sigma\hat{B}A = \hat{\Delta}$.

ii. Τα τρίγωνα ΣΑΒ και ΣΔΓ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Οι χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται στο σημείο Ε και οι γωνίες με κορυφές τα σημεία Α και Δ είναι ίσες, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

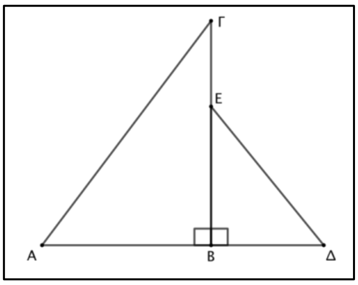


α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΔΕΒ είναι όμοια.

β) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

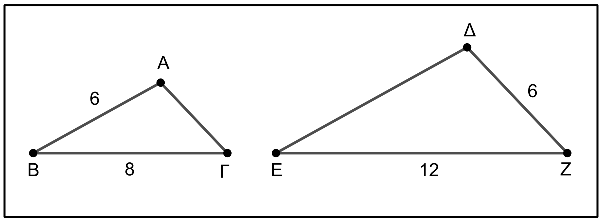
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΒΕ.

4. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ στο παρακάτω σχήμα είναι όμοια και η ομόλογη πλευρά της ΒΓ είναι η ΕΖ. Δίνονται επίσης $AB = 6$, $B\Gamma = 8$, $\Delta Z = 6$ και $EZ = 12$.

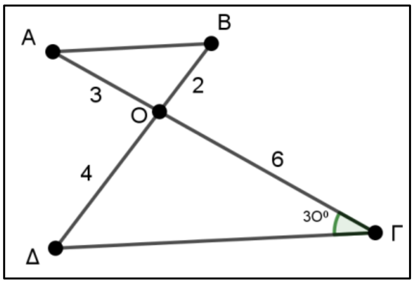


α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι $\frac{2}{3}$.

β) Να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα των λόγων $\frac{ΑΒ}{.....}=\frac{.....}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{.....}$.

γ) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΔΕ .

5. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν $ΟΑ=3,\ ΟΒ=2,\ ΟΓ=6,\ ΟΔ=4$ και η γωνία $Ο\hat{Γ}Δ$ ισούται με 30° τότε:

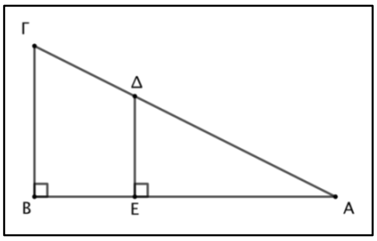


α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια.

β) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα των λόγων: $\frac{ΟΑ}{.....}=\frac{.....}{ΟΔ}=\frac{ΑΒ}{.....}$.

γ) να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $Ο\hat{Α}Β$.

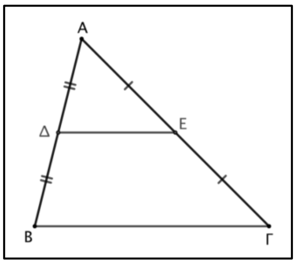
6. Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{Β}$ και $Α\hat{Ε}Δ$ είναι ορθές.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια.

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ.

7. Έστω Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τριγώνου ΑΒΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

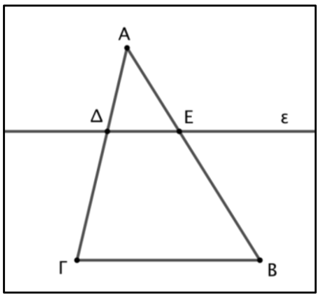


α) Να αιτιολογήσετε γιατί $ΔΕ\ //\ ΒΓ$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

γ) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ.

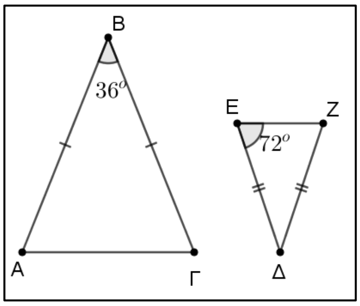
8. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΕ, αν είναι $ΑΔ=2,\ ΔΓ=6$ και $ΒΓ=4$.

9. Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΑΓ με $ΒΑ=ΒΓ$ και ΔΕΖ με $ΔΕ=ΔΖ$. Δίνεται επίσης ότι $\hat{Β}=36^{\circ}$, $\hat{Ε}=72^{\circ}$ και $ΑΒ=2ΔΕ$.

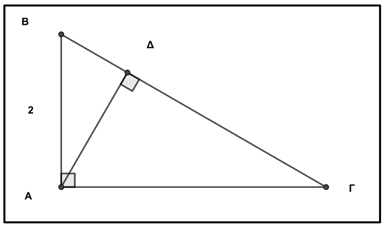


α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{Δ}=36^{\circ}$ **ii.** $ΒΓ=2ΔΖ$

β) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

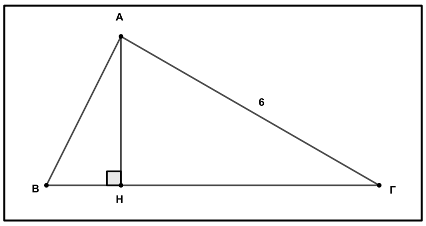
10. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, με την υποτείνουσα του $ΒΓ = 4$ και την κάθετη πλευρά του $ΑΒ = 2.$ Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου τότε:

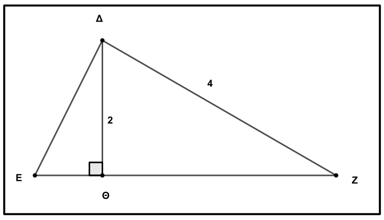


α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια.

β) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΔ.

11. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του παρακάτω σχήματος έχουν $\hat{Α} = \hat{Δ}$, $\hat{Β} = \hat{Ε}$ και $\hat{Γ} = \hat{Ζ}$.





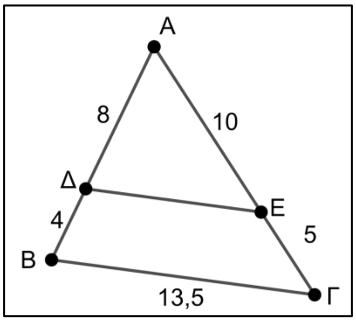
Αν γνωρίζουμε ότι $ΑΓ = 6$, $ΔΖ = 4$ και $ΔΘ = 2$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ είναι όμοια,

β) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΗ,

γ) να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{ΗΓ}{ΘΖ}$.

12. Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε $ΑΔ = 8$, $ΒΔ = 4$, $ΑΕ = 10$ και $ΕΓ = 5.$ Επίσης $ΒΓ = 13{,}5.$

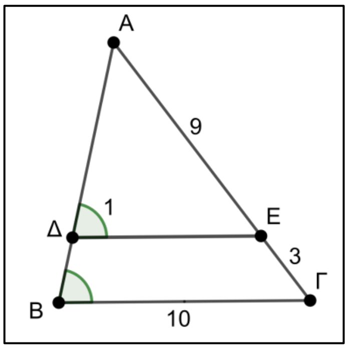


α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\dfrac{2}{3}$.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ.

13. Τα σημεία Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε $ΑΕ = 9$, $ΕΓ = 3$ και η γωνία $\hat{Δ}_1 = Α\hat{Δ}Ε$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{Β}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

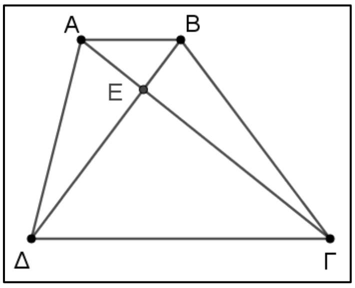


α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\dfrac{3}{4}$.

γ) Αν επιπλέον $ΒΓ = 10$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ.

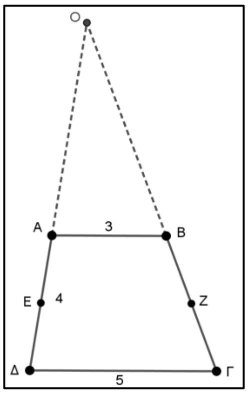
14. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB//\Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 3AB$. Οι διαγώνιές του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε .



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{E\Gamma}{EA}$.

15. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB//\Gamma\Delta$ και Ε, Ζ τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Αν $AB = 3,\ \Delta\Gamma = 5,\ A\Delta = 4$ και οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Ο, τότε:



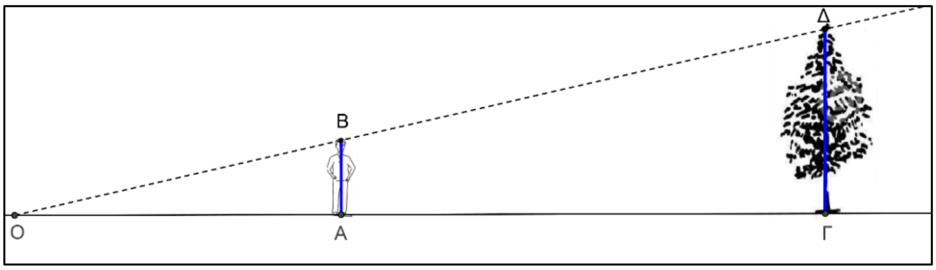
α) να υπολογίσετε το μήκος του ΕΖ.

β) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΕΖ είναι όμοια.

γ) να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ.

16. Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά ΓΟ μήκους 12 m. Την ίδια στιγμή, ένας μαθητής, ύψους 1,75 m, για να βρει το ύψος του δέντρου στέκεται σε ένα σημείο πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έτσι ώστε, η σκιά του ΑΟ και η σκιά ΓΟ του δέντρου να βρίσκονται στην ίδια ευθεία και να έχουν το ίδιο άκρο Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ο μαθητής μετράει τη σκιά του εκείνης της χρονικής στιγμής και βρίσκει ότι έχει μήκος 2 m. Να θεωρήσετε ότι τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ του σχεδίου αναπαριστάνουν τα ύψη του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και ότι είναι κάθετα στην ΟΓ.

α) i. Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.



(Σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

β) Η γραπτή λύση που έδωσε ένας μαθητής στο ερώτημα **α)ii.** είναι η παρακάτω.

« **α)ii.** $\frac{AB}{OA} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma A}$ ή $\frac{1,75}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{12-2}$ ή $\Gamma\Delta = \frac{1,75 \cdot 10}{2} = 8,75$ m ».

Είναι η λύση του μαθητή σωστή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

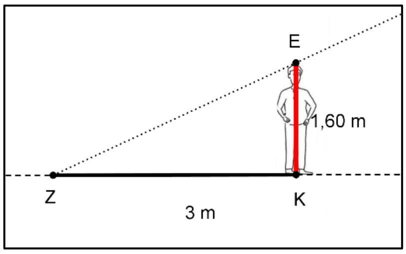
[Σημείωση: Όταν το φως κινείται μέσα σε ομογενή υλικά, διαδίδεται ευθύγραμμα και σχηματίζει αυτό που περιγράφεται ως φωτεινή ακτίνα. Όταν οι φωτεινές ακτίνες συναντήσουν στην πορεία τους αδιαφανές εμπόδιο, πίσω από το εμπόδιο δημιουργείται μια περιοχή που δεν φωτίζεται απευθείας από τις ακτίνες, την οποία περιοχή αναγνωρίζουμε ως σκιά. Όταν η πηγή του φωτός βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, όπως ο ήλιος, οι φωτεινές ακτίνες θεωρούνται παράλληλες μεταξύ τους]

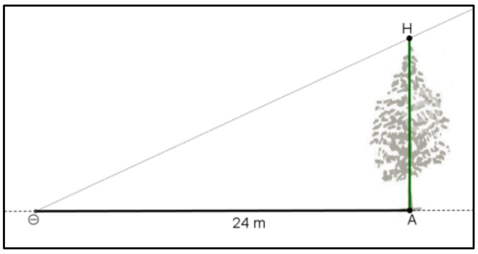
17. Το φως όταν κινείται μέσα σε ομογενή υλικά, διαδίδεται ευθύγραμμα και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ευθείες γραμμές (φωτεινές ακτίνες) για να αναπαραστήσουμε το ίχνος της διαδρομής του. Όταν η πηγή του φωτός βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, όπως ο ήλιος, οι φωτεινές ακτίνες θεωρούνται παράλληλες μεταξύ τους. Ένας άνθρωπος ύψους 1,6m ρίχνει κάποια στιγμή σκιά μήκους 3m. Την ίδια χρονική στιγμή και πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο ένα δέντρο ρίχνει σκιά μήκους 24m. Τα σχέδια της εικόνας που ακολουθεί αναπαριστάνουν τις δυο περιπτώσεις.

Να θεωρήσετε ότι οι ΖΕ και ΘΗ αναπαριστάνουν τις φωτεινές ακτίνες του ήλιου και είναι παράλληλες μεταξύ τους, τα τμήματα ΚΖ, ΑΘ αναπαριστάνουν τις σκιές του δέντρου και του ανθρώπου και είναι παράλληλα μεταξύ τους και, τα δε τμήματα ΚΕ, ΑΗ αναπαριστάνουν τα αντίστοιχα ύψη τους, τα οποία είναι κάθετα στα ΚΖ, ΑΘ.

α) i. Είναι όμοια τα τρίγωνα ΖΚΕ και ΘΑΗ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

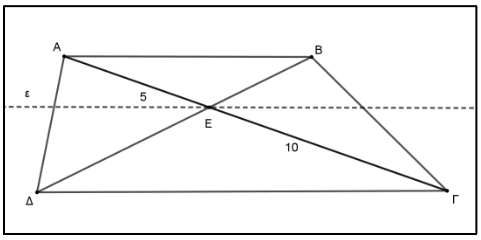




(Σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

β) Η γραπτή λύση που έδωσε ένας μαθητής στο ερώτημα **α)i.** είναι η ακόλουθη: «Τα δύο τρίγωνα ΚΖΕ και ΑΘΗ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια». Ο καθηγητής του μαθητή του είπε ότι ο συλλογισμός του έχει λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

18. Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ//ΓΔ)$ και Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ . Αν $ΑΕ=5$ και $ΕΓ=10$:

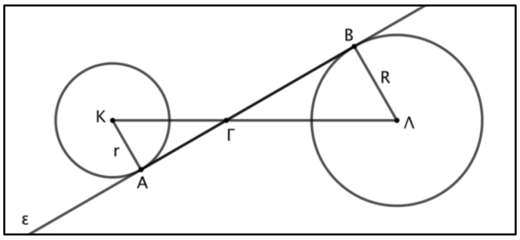


α) Να αποδείξετε ότι $\frac{ΒΕ}{ΕΔ}=\frac{1}{2}$.

β) Αν $ΒΔ=12$, να βρείτε το μήκος των τμημάτων ΒΕ και ΔΕ.

γ) Να δικαιολογήσετε ότι $\frac{AB}{\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}$.

19. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους κύκλους (K,r) και (Λ,R) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής της διακέντρου ΚΛ και της ευθείας (ε).

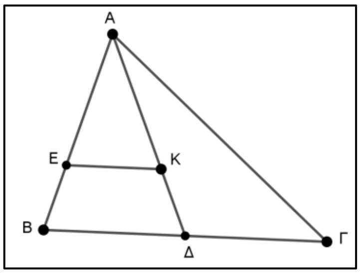


α) Να αιτιολογήσετε ότι οι γωνίες $K\hat{A}\Gamma$ και $\Lambda\hat{B}\Gamma$ είναι ορθές.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΑΓ και ΛΒΓ είναι όμοια.

γ) Ποια είναι η θέση του σημείου Γ στη διάκεντρο ΚΛ όταν η ακτίνα R είναι διπλάσια της ακτίνας r;

20. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, η ΑΔ είναι διάμεσος και το σημείο Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Από το Κ φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Δίνεται ότι η $AB=6$.



α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AK}{A\Delta}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΑΒΔ είναι όμοια.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΕ.