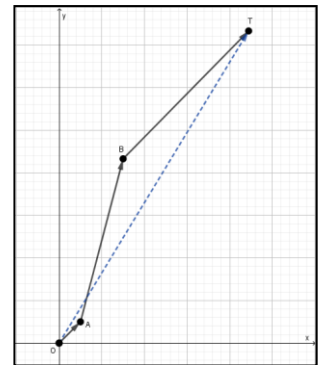
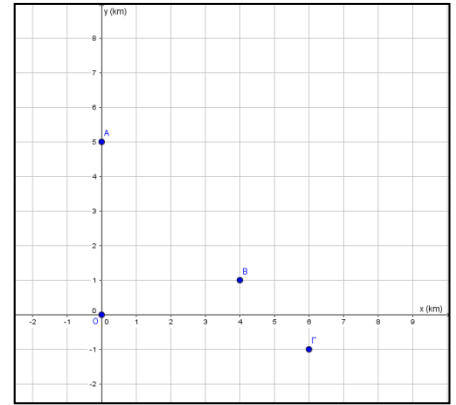


1.4 Συντεταγμένες στο Επίπεδο

1. Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$, $\Gamma(6,2)$ και $\Delta(3,4)$.
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{A\Delta}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{B\Delta}$ και να επιβεβαιώσετε ότι: $\overline{A\Delta} = \overline{B\Gamma}$.
- β) Να δείξετε ότι $|\overline{B\Delta}| = |\overline{B\Gamma}|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$;
2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2,5)$ και $\vec{\beta} = (1,-3)$.
- α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.
- β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\nu} = (8,-21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
3. Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(4,0)$ και $\Gamma(5,1)$.
- α) Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία A , B και Γ .
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
4. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5,-12)$.
- α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.
- β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 7.
5. Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $\Gamma(2, 5)$.
- α) Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overline{\Delta\Gamma} = \overline{AB}$.
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ) Να βρείτε το κέντρο O του παραλληλογράμμου.
6. Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο O) τρεις μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο A , στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο T . Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα $\overline{OA} = (1,1)$, $\overline{AB} = (2,4)$, $\overline{BT} = (2,5\sqrt{3}-5)$, όπως φαίνονται στο σχήμα:
- Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:
- α) Να αποδείξετε ότι $\overline{OT} = (5,5\sqrt{3})$.
- β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας.



7. Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overline{AB} και $\overline{B\Gamma}$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ.

8. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,1)$ και $\vec{\beta} = (-8,-4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

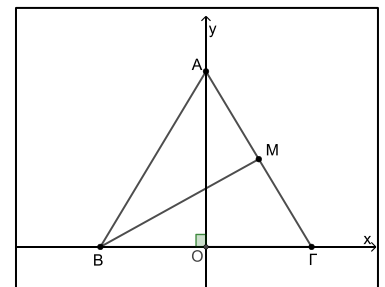
9. Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overline{AB} = (3,-3)$ και $\overline{A\Gamma} = (3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$.

β) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overline{\Gamma\Delta}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\overline{AB} // \overline{\Gamma\Delta}$.

10. Το ισοσκελές τρίγωνο ABΓ έχει βάση BΓ και ύψος AO. Η κορυφή A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές B και Γ είναι σημεία του άξονα x'x, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $(B\Gamma) = 12$, $(AO) = 8$ και M το μέσο της πλευράς AΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A(0,8)$, $B(-6,0)$ και $\Gamma(6,0)$.

ii. $M(3,4)$.

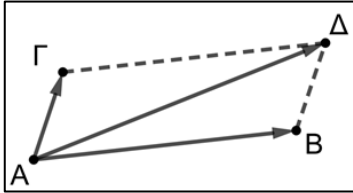
β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM.

11. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,-3)$ και $\vec{\beta} = (-2,-1)$ ορίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} .

β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το \vec{w} ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

- γ) Αν τα $\vec{\beta}$, \vec{w} , \vec{u} είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.
12. Δίνεται τα διανύσματα $\vec{a} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (-1,1)$ και $\vec{\gamma} = (-5,-5)$.
- α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.
- β) Να αποδείξετε ότι: $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.
- γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta}$.
13. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία A(3,4), B(2,1), Γ(3,-1) και Δ(4,2).
- α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A, B, Γ και Δ.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
- γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
14. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία A(-1,6), B(1,2), Γ(3,-2).
- α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{B\Gamma}$.
- β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.
- γ) Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.
15. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία A(2,4), B(11,5), Γ(3,7) και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:
- α) των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Gamma}$,
- β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$,
- γ) του σημείου Δ.
- 
16. Δίνονται τα σημεία A(2,1) και B(6,7) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.
- α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα \overrightarrow{AB} .
- β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{v} .
- γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8,-12)$ και \vec{v} του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.
17. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3,3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3},1)$.
- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσής των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

18. Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα με $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ το θετικό ημιάξονα Ox.

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

19. Θεωρούμε τρίγωνο OAB, με $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = (6, 8)$. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 4, |\vec{\alpha}| - 2)$.

α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$.

β) Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο OAGB να αποτελεί παραλληλόγραμμο.

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά OA με τη διαγώνιο AB του παραλληλογράμμου OAGB.

20. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\vec{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \text{ και } \vec{OB} = (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$.

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ .

γ) Για ποιές τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5;

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

21. Δίνονται τα σημεία A(-3, -1), B(0, 3) και M(x, y) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{AM} , \vec{MB} και \vec{AB} .

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων \vec{AM} , \vec{MB} και \vec{AB} .

γ) Να αποδείξετε ότι $|\vec{AM}| + |\vec{MB}| \geq 5$.

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

«Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4. \text{ »}$$

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.