

## 2.2 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

1. Δίνεται το σημείο  $A(1, -3)$  και η ευθεία  $(\varepsilon): 4x + 6y = 1$ .
  - α) Να εξηγήσετε γιατί το  $A$  δεν είναι σημείο της ευθείας  $(\varepsilon)$ .
  - β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $(\varepsilon)$ .
  
2. Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon_1): 3x - y = 5$  και  $(\varepsilon_2): x - y + 1 = 0$ .
  - α) Να βρεθεί το σημείο τομής τους  $M$ .
  - β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $M(3, 4)$  και είναι κάθετη στην  $(\varepsilon_2)$ .
  - γ) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην  $(\varepsilon_1)$ .
  
3. Δίνονται οι εξισώσεις  $\lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0$  (1) και  $(3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0$  (2) με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - β) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες.
  
4. Δίνονται τα σημεία  $A(3, 2)$  και  $B(-1, -6)$ . Να βρεθούν:
  - α) Οι συντεταγμένες του μέσου  $M$  του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ .
  - β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$ .
  - γ) Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας  $(\varepsilon)$  του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ .
  
5. Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με κορυφή  $A(1, 4)$ . Η πλευρά  $A\Delta$  έχει εξίσωση  $3x - 2y + 5 = 0$  και η διαγώνιος  $B\Delta$  έχει εξίσωση  $y = x + 2$ .
  - α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή  $\Delta$  έχει συντεταγμένες  $\Delta(-1, 1)$ .
  - β) Αν οι διαγώνιοι  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου  $A\Gamma$ .
  
6. Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon): -x + y - 2 = 0$  και τα σημεία  $A(-5, 1)$  και  $B(-3, 5)$ .
  - α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου  $A$  ως προς το σημείο  $B$ .
  - β) Να βρείτε:
    - i. την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon')$  που διέρχεται από το  $B$  και είναι κάθετη στην  $(\varepsilon)$ ,
    - ii. το σημείο τομής των ευθειών  $(\varepsilon)$  και  $(\varepsilon')$ .
    - iii. το συμμετρικό του σημείου  $B$  ως προς την ευθεία  $(\varepsilon)$ .

7. Δίνονται τα σημεία  $A(1,1)$  και  $B(2,3)$ .
- α) **i.** Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα  $A, B$ .
- ii.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας  $AB$  είναι η  $(\varepsilon): y = 2x - 1$ .
- β) Να εξετάσετε αν το σημείο  $\Gamma(2^{100}, 5)$  ανήκει στην ευθεία  $(\varepsilon)$ .
8. Δίνεται η εξίσωση  $(\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  (1).
- α) **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε  $\mu \in \mathbb{R}$ .
- ii.** Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
- β) **i.** Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της;
- ii.** Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της;
- γ) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού  $\mu$ , προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με τον άξονα  $x'x$ . Ποια είναι η εξίσωσή της;
9. Δίνονται οι εξισώσεις  $\lambda x + y = 2\lambda$  (1) και  $x + \lambda y = \lambda + 1$  (2), όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- α) Να δείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες  $(\varepsilon_\lambda)$  και  $(\eta_\lambda)$  αντίστοιχα.
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  οι ευθείες  $(\varepsilon_\lambda)$  και  $(\eta_\lambda)$  τέμνονται.
- γ) Για  $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ ,
- i.** να βρείτε συναρτήσεσι του  $\lambda$  τις συντεταγμένες του σημείου τομής  $M$  των  $(\varepsilon_\lambda)$  και  $(\eta_\lambda)$ ,
- ii.** αν  $M\left(\frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)$  να αποδείξετε ότι το  $M$  κινείται στην ευθεία  $(\zeta): x - y = 1$ .
10. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon_1)$  που διέρχεται από τα σημεία  $A(4,2)$  και  $B(8,5)$ .
- β) Αν  $(\varepsilon_1): 3x - 4y - 4 = 0$ , να δείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζει με την ευθεία  $(\varepsilon_2): 7x - y - 1 = 0$ , είναι  $\hat{\varphi} = 45^\circ$ .
- γ) Να βρείτε το σημείο τομής των  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ .
- δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας  $(\varepsilon_3)$  τέτοιας ώστε η  $(\varepsilon_2)$  να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_3)$ .
11. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία  $O(0,0)$ ,  $B(\kappa,0)$  και  $\Gamma(0,2\kappa)$  όπου  $\kappa$  θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου  $O\Gamma B$  κατασκευάζουμε τετράγωνα  $O\beta\Delta E$  και  $O\Gamma Z\eta$ , τότε:

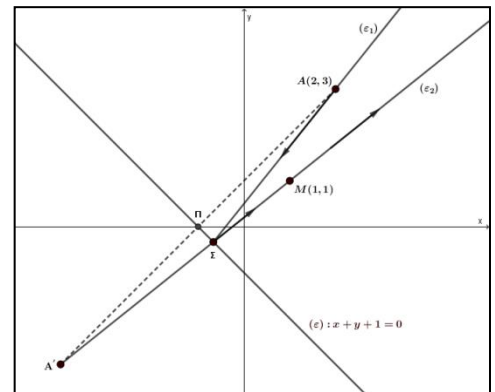
- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΖ.  
 β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΒΓ που διέρχεται από το Ο.  
 γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ, ΒΖ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο.

12. Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon_1): y = \sqrt{3}x$  και  $(\varepsilon_2): y = x$ .

- α) Να σχεδιάσετε τις  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.  
 β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  με τον άξονα  $x'x$ .  
 γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  είναι  $15^\circ$ .  
 δ) Να αποδείξετε ότι  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ .

13. Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο  $A(2,3)$  και προσπίπτουσα στην ευθεία  $(\varepsilon): x + y + 1 = 0$ , μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο  $M(1,1)$ .

- α) **i.** Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου  $A$  πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι το σημείο  $\Pi(-1,0)$ .  
**ii.** Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου  $A$  ως προς την ευθεία  $(\varepsilon)$ , είναι το σημείο  $A'(-4,-3)$ .

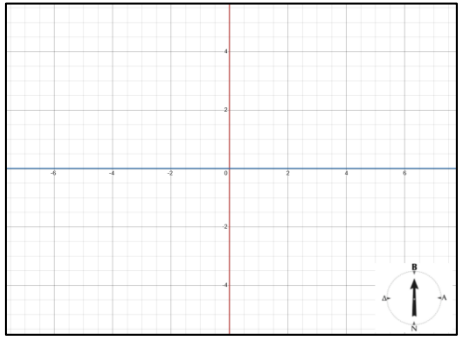


- β) **i.** Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία  $(\varepsilon_2)$ , η οποία διέρχεται από τα σημεία  $A'$ ,  $\Sigma$ ,  $M$ , τότε να βρείτε την εξίσωσή της.  
**ii.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης  $\Sigma$  της φωτεινής ακτίνας  $(\varepsilon_1)$  πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon)$ .

γ) Αν  $\Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ , τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας  $(\varepsilon_1)$ .

14. Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών  $(\varepsilon_\alpha): (\alpha - 4)x - 2\alpha y + \alpha + 4 = 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν  $\alpha = 0$  και όταν  $\alpha = 1$  και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο  $M$ .  
 β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το  $M$ .  
 γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες  $Ox$ ,  $Oy$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.  
**i.** Να αποδείξετε ότι  $0 < \alpha < 4$ .  
**ii.** Να βρείτε για ποια τιμή του  $\alpha$  ισχύει  $(OA) = 2(OB)$ .

15. Δύο εργοστάσια A και B τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες  $A(2,1)$ ,  $B(4,3)$ , βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια.
- β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση  $(\varepsilon): y = 2x - 7$ , να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια.
- γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι  $N(4,1)$ , να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.
16. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ , η εξίσωση ευθείας  $\varepsilon_\lambda: \lambda x + (1-\lambda)y + 2 = 0$ , όπου  $\lambda$  αριθμός που μεταβάλλεται στο  $\mathbb{R}$ , παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος  $\Phi$ . Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο  $O(0,0)$ .
- α) **i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου  $\Phi$ .
- ii.** Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.
- β) Ένα ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου  $\Phi$ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το P έχει εξίσωση  $x + y + 4 = 0$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους.
- 
17. Δίνονται τα σημεία  $A(1,1)$ ,  $B(3,3)$ .
- α) Αν  $M(x,y)$  σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις  $d_1, d_2$  του M από τα A και B αντίστοιχα.
- β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι  $d_1, d_2$  ώστε το σημείο M να ανήκει στη μεσοκάθετο του AB.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB.
- δ) Να βρείτε σημείο  $\Sigma$  τέτοιο ώστε το τρίγωνο  $\Sigma AB$  να είναι ισόπλευρο.
18. Δίνεται η εξίσωση  $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$  (1) όπου  $\mu \in \mathbb{R}$ .
- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu$ , η (1) παριστάνει ευθεία  $(\varepsilon)$ .
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu$ , οι ευθείες  $(\varepsilon)$ :
- i.** είναι παράλληλες στον  $x'x$ .
- ii.** είναι παράλληλες στον  $yy'$ .
- iii.** διέρχονται από το  $(0,0)$ .
- γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες  $(\varepsilon)$  που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.