

2.3 Εμβαδόν τριγώνου

1. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y - 2x = 0$ και τα σημεία $B(1,1)$ και $\Gamma(-1,3)$.
 - α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(5,10)$ ανήκει στην ευθεία (ε) .
 - β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overline{AB} και $\overline{A\Gamma}$.
 - γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

2. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.
 - α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία (ε) ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της (ε) .
 - β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .
 - γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία (ε) είναι το B .

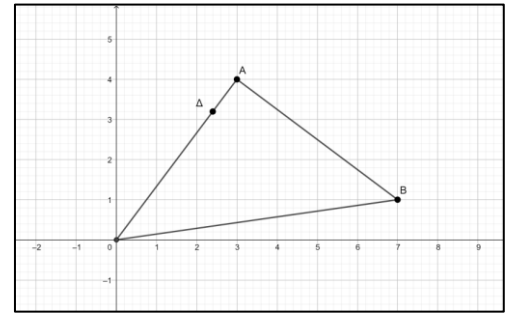
3. Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): 2x + y - 6 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2x + y + 2 = 0$.
 - α) Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.
 - β)
 - i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην ευθεία (ε_1) .
 - ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .

4. Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.
 - α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overline{AB} και $\overline{A\Gamma}$.
 - β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα \overline{AB} και $\overline{A\Gamma}$ είναι κάθετα.
 - γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA) = (MB)$.

5. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-3,-1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.
 - α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .
 - β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι: $E = 8$.

6. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2x + 3y = 5$ και $(\varepsilon_2): 4x + 6y = 8$.
 - α) Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) είναι παράλληλες.
 - β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας (ε_1) .
 - γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_2) .

7. Δίνεται το τρίγωνο AOB με $A(3,4)$, $B(7,1)$, O η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ της πλευράς AO.



- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{OA} και $\overrightarrow{A\Delta}$.
- β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$.
- γ) Δίνεται ότι $(OAB) = \frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι $(A\Delta B) = \frac{1}{5}(OAB)$.

8. Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$, $\Gamma(1,1)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{A\Gamma}$.
- β) i. Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ ορίζουν τρίγωνο.
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

9. Δίνονται οι ευθείες: $(\epsilon_1): y = \frac{2}{3}x + 1$ και $(\epsilon_2): x = \frac{2}{3}y + 9$.

- α) Να αποδείξετε ότι: $(\epsilon_1) \parallel (\epsilon_2)$.
- β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2) .

10. Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και η ευθεία $(\epsilon): y = x + 3$.

- α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ϵ) .
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ϵ) .
- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η) , (ϵ) .

11. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία $A(2,5)$, $B(3,6)$, $\Gamma(-1,-2)$.

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας BΓ.
- β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το A.
- γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$.

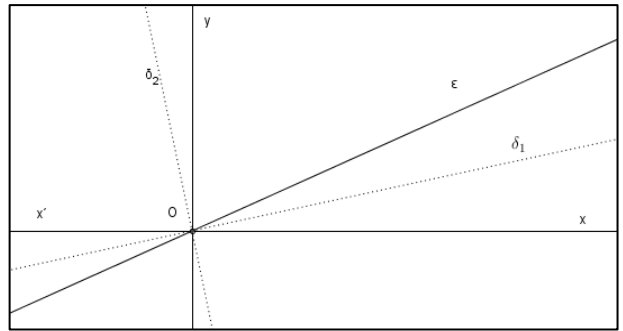
12. Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $\Gamma(4,-1)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3,-1)$.

- α) Να βρεθεί το σημείο B.
- β) Αν $B(5,0)$:
- i. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

13. Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία $A(1,1)$, $B(5,2)$, $\Gamma(0,-2)$, $\Delta(8,0)$.
- α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο.
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπέζιου του ερωτήματος α).
14. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,7)$, $B(-1,5)$ και $\Gamma(3,3)$.
- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β) Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, τότε να υπολογίσετε:
- τις συντεταγμένες του M ,
 - την εξίσωση της διαμέσου AM .
15. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.
- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.
- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$.
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_3) .
16. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 8x + \psi - 28 = 0$, $(\varepsilon_2): x - \psi + 1 = 0$, $(\varepsilon_3): 3x + 4\psi + 5 = 0$.
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των (ε_1) και (ε_2) .
- β) Αν το σημείο τομής είναι το $M(3,4)$ να υπολογίσετε:
- το μέτρο του διανύσματος \overline{OM} , όπου O η αρχή των αξόνων,
 - την απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε_3) .
17. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου A από το σημείο B .
- β) Για ποιες τιμές του α , η απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .
- γ) Για $\alpha = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$.
18. Θεωρούμε μία ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x$ με θετική κλίση λ .

- α) Αν δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_1 είναι:

$$y = \lambda_1 x \quad \text{με} \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}$$



- β) Αν δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_2 είναι:

$$y = \lambda_2 x \quad \text{με} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 + \lambda^2}}$$

- γ) Αν $\lambda = 1$, να εφαρμόσετε τους τύπους του α) ερωτήματος για να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\phi 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$.

19. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι τοποθετημένα 7 χωριά ως σημεία του επιπέδου και μια πηγή νερού σε ένα σημείο Π . Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 αγωγοί νερού που συνδέουν την πηγή με έξι από τα παραπάνω χωριά. Οι αγωγοί αυτοί ανήκουν στις γραμμές με εξισώσεις της μορφής:

$$(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2 = 0, \quad \text{με} \quad \lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

- α) Να αποδείξετε ότι και οι 6 γραμμές είναι ευθείες.
 β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Π .
 γ) Το έβδομο χωριό βρίσκεται στο σημείο $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι κανένας από τους παραπάνω αγωγούς νερού δεν διέρχεται από το χωριό αυτό.
 δ) Προκειμένου να έχει πρόσβαση στο νερό το χωριό O , υπάρχουν δύο επιλογές:
 1^η επιλογή: Να συνδέσουμε απευθείας το χωριό O με την πηγή
 2^η επιλογή: Να συνδέσουμε το χωριό O με έναν από τους παραπάνω αγωγούς μέσω της συντομότερης διαδρομής.
 Με δεδομένο ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές είναι το ίδιο,
 i. να βρείτε την τιμή του λ για την οποία οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής.
 ii. Πως εξηγείται γεωμετρικά το συμπέρασμα;

20. Δίνεται το σημείο $M(-2, 2)$.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο M .
 β) i. Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy .
 ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1), η οποία διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy , τρίγωνο, με εμβαδόν $E = 8$.

γ) Αν $(\varepsilon_1): y = x + 4$, να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η (ε_1) με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή O .

21. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $(\varepsilon_2): y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις (ε_1) , (ε_2) στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

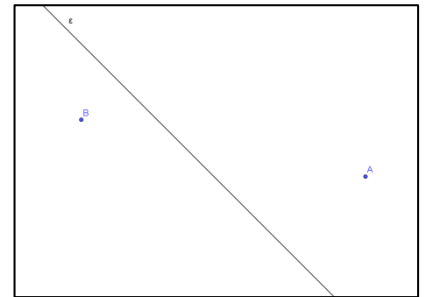
β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια με τον άξονα xx' .

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου $O(0,0)$, $A(3,\sqrt{3})$, $B(3,3)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

22. Η ευθεία (ε) με εξίσωση $x + y - 1 = 0$ του σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων $A(8,1)$, $B(-7,4)$ (για την ακρίβεια A, B είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις). Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής (ε) , σταθμός σε ένα σημείο Σ και μία πεζογέφυρα σε ένα σημείο Π . Να βρείτε :



α) ποια πόλη από τις A, B είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τράινου,

β) τις συντεταγμένες του Π , αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο της γραμμής στην πόλη B .

γ) τις συντεταγμένες του Σ στις παρακάτω περιπτώσεις

i. ο σταθμός Σ να ισαπέχει από τις πόλεις A, B .

ii. το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό Σ με τις πόλεις A, B να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

23. Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(3,-1)$ και $\Gamma(-2,0)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με $\frac{9}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $\Delta(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(\Delta A\Gamma) = (AB\Gamma)$.

γ) Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ του ερωτήματος β) αποτελείται από τις ευθείες

$(\varepsilon_1): x - 4y - 7 = 0$ και $(\varepsilon_2): x - 4y + 11 = 0$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ΑΓ$, (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.

ii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x - 4y - 7 = 0$ και $x - 4y + 11 = 0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία $ΑΓ$ ».

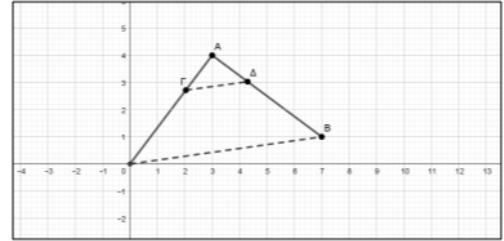
24. Σε σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία $A(3,4)$ και $B(7,1)$.

α) Αν $\Gamma\left(2, \frac{8}{3}\right)$ και $\Delta\left(\frac{13}{3}, 3\right)$ να δείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{ΑΓ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ΑΟ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ΑΒ}$,

ii. $\Gamma\Delta // OB$,

iii. Να δείξετε ότι: $(ΑΓΔ) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (ΑΟΒ)$.



β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του α) ερωτήματος, αν για τα σημεία Γ και Δ ισχύουν $\overrightarrow{ΑΓ} = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{ΑΟ}$ και

$\overrightarrow{ΑΔ} = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{ΑΒ}$, να δείξετε ότι $(ΑΓΔ) = \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 (ΑΒΟ)$.

25. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + y = x + 2xy + 6$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(x - y)^2 - (x - y) - 6 = 0$,

ii. η εξίσωση παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, τις οποίες να βρείτε.

Έστω $(\varepsilon_1): x - y - 3 = 0$ και $(\varepsilon_2): x - y + 2 = 0$ οι δυο παράλληλες ευθείες.

β) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M\left(\alpha, \alpha - \frac{1}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ισαπέχουν από τις δυο ευθείες.

γ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δυο ευθειών.

26. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0$ (E) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $(\zeta): 6x - 8y + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (E) παριστάνει ευθεία.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (E), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (E) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ) . Ποια είναι η εξίσωση της (ε) ;

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(1,3)$ από την ευθεία (ζ) .

27. Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(\mu - 1, 3\mu - 2)$, $\mu \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το \mathbb{R} , το σημείο Γ κινείται στην ευθεία $(\varepsilon): y = 3x + 1$.
- β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το \mathbb{R} , τα σημεία A , B , Γ είναι κορυφές τριγώνου.
- γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό.
- δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο B και από τις οποίες το σημείο A , απέχει απόσταση ίση με 1.
28. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$, $\Gamma(5, -1)$.
- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή A . Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας $B\Gamma$, από το οποίο, το A απέχει την ελάχιστη απόσταση.
- δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $(MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$.
29. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $\Lambda(2, 6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi(\lambda - 1, 2 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του.
ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι.
- β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:
i. ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι;
ii. το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι.
30. Δύο οικισμοί A και B βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1, -2)$ και $B(3, 1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $(\delta): x + y - 1 = 0$.
- α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ :
i. Ο οικισμός A έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.
ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.
- β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία A , B και Γ είναι ίσο με 8.

31. Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία A και B. Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.
- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.
- β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;
- γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή $t = 2$.
- δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε): $4x + 3y + 7 = 0$ ισούται με 6 .
32. Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις A και B έχουν συντεταγμένες $A(3,6)$ και $B(7,-2)$.
- α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή.
- β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία A, B και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη.
33. Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(3,4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A, έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B, έχει εξίσωση (ε): $15x - 8y - 30 = 0$.
- β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B.
- γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).
34. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$.
- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η (ε): $y = 2x - 1$.
- β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.
- γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου AOB.

35. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B\left(\frac{\alpha}{2},\beta\right)$ και $M\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$, όπου α,β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.
- α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA .
- β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι αντίστοιχα
- $$(OB): 2\beta x - \alpha y = 0 \quad \text{και} \quad (AB): 2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$$
- γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$.
- δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;
36. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε για ποια τιμή του α , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .
- β) Για $\alpha = 4$:
- Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα yy' .
 - Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.
37. Θεωρούμε τα σημεία $A(-2,-3)$ και $B(7,9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB) = 12 \tau.μ.$
- α) Να αποδείξετε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών
- $$(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0$$
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2) .
- γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2 . Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2) , που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2 ; Εξηγήστε.
38. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(3,1)$.
- α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.
- β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.
- γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε $(KA) = (KB)$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K ;
39. Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3,4)$, $B(2,5)$ και $\Gamma(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha - 1, 3\alpha + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ.

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ ισχύει $(MBΓ) = (ABΓ)$. Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;