## 3.1 Ο Κύκλος

**1.** Έστω Ω το σύνολο όλων των σημείων $(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $x^2+y^2\le 9$.

**α)** Να σχεδιάσετε το σύνολο Ω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy .

**β)** Υπάρχει σημείο Α στο σύνολο Ω τέτοιο ώστε $|\overrightarrow{OA}|=4$, όπου O η αρχή των αξόνων;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

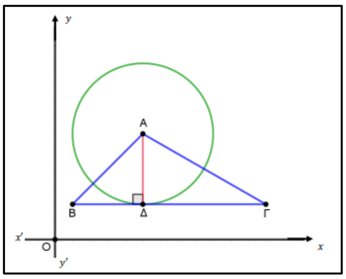
**2.** Δίνεται ο κύκλος $(C)$ με εξίσωση $x^2+y^2-6x-8y=0$ $(1)$.

**α)** Να δείξετε ότι ο κύκλος $(C)$ έχει κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $\rho=5$.

**β)** Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία $(\varepsilon):3x+4y=0$ ισούται με 5 .

**γ)** Να δικαιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός: «Ο κύκλος $(C)$ και η ευθεία ε εφάπτονται».

**3.** Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ ώστε $A(5,6)$, $B(1,2)$, $\Gamma(12,2)$ και το ύψος του ΑΔ, όπου Δ σημείο της ΒΓ, όπως στο σχήμα.




**α)** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΒΓ και ΑΔ .

**β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο Α, ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ΒΓ στο σημείο Δ.

4. Θεωρούμε την ευθεία $(\varepsilon):3x-4y=0$ και το σημείο $A(-2,1)$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία είναι 2.

**β)** Να βρείτε την εξίσωση ευθείας $(\eta)$ κάθετης στην $(\varepsilon)$ που διέρχεται από το σημείο Α.

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Α και εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon)$.

**5.** Δίνεται η εξίσωση: $(y-1)^2=(3+x)(1-x)$ $(1)$.

Να αποδείξετε ότι:

**α)** Η εξίσωση $(1)$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα

**β)** Η αρχή $O(0,0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου $(K,R)$,

**γ)** Η $(\varepsilon):x+y=2$ είναι τέμνουσα του κύκλου $(K,R)$.

**6.** Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-x-y-\frac{7}{2}=0$ $(1)$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(1)$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R=2$.

**β)** Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου $(K,R)$.

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $(K,R)$ στο A.

**7.** Δίνονται τα σημεία $A(0,3)$, $B(3,4)$, $\Gamma(1,0)$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή.

**β)** Να βρείτε το μέσο Κ της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

**8.** Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(3,-3)$, $B(2,-8)$ και $\Gamma(7,-3)$. Να βρείτε:

**α)** την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

**β)** την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Α και εφάπτεται στην πλευρά ΒΓ.

**9.** Δίνεται ο κύκλος $(C)$ με εξίσωση $x^2+y^2=25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

**α)** τον κύκλο $(C)$.

**β)** τις εφαπτόμενες του $(C)$ που διέρχονται από τα σημεία τομής του $(C)$ με τον $yy'$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

**γ)** τις εφαπτόμενες του $(C)$ που διέρχονται από τα σημεία τομής του $(C)$ με τον $x'x$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

**10.** Δίνεται κύκλος $(C)$ με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $5$.

**α)** Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου $(C)$ και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

**β)** Δίνεται το σημείο $A(3,-4)$.

**i.** Να αποδείξετε ότι το σημείο $A$ ανήκει στον κύκλο $(C)$.

**ii.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $(C)$ στο σημείο Α.

**11.** Δίνεται η εξίσωση: $(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4\ (1)$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(1)$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R=2$.

**β)** **i.** Να βρείτε τα σημεία Α και Β του κύκλου $(K,R)$ τα οποία έχουν τετμημένη ίση με $-1$.

**ii.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά.

12. Δίνεται το σημείο $K(-3,1)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 4x-3y+5=0$..

**α)** Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Κ από την ευθεία $(\varepsilon)$ είναι ίση με 2.

**β)** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου $(C)$ που έχει κέντρο το σημείο $K$ και εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon)$.

**γ)** Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο $(C)$ και την ευθεία $(\varepsilon)$.

**13.** Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ του τμήματος $AB$.

**β)** Να αποδείξετε ότι $(KA)=\sqrt{5}$.

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $AB$.

**14.** Δίνεται ο κύκλος $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=4$ και η ευθεία $(\varepsilon):3x-4y=8$.

**α)** Να βρείτε το κέντρο $K$ του κύκλου $(C)$ και την ακτίνα του.

**β)** Αν $K(1,2)$, να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου $(C)$ από την ευθεία $(\varepsilon)$ είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{13}{5}$.

**γ)** Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία $(\varepsilon)$ και ο κύκλος $(C)$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

**15.** Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2-4x+3=0$ $(1)$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(1)$ παριστάνει κύκλο $(C)$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

**β)** Να σχεδιάσετε τον κύκλο $(C)$ και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιανδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες.

**16.** Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2+y^2-2x-4y+1=0$ με κέντρο $K(1,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x+4y+1=0$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου $(C)$ είναι $\rho=2$.

**β)** Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K$ από την ευθεία $(\varepsilon)$ είναι $\frac{12}{5}$.

**γ)** Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία $(\varepsilon)$ και ο κύκλος $(C)$ δεν έχουν κοινά σημεία.

17. **α)** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

**β)** Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=5$.

**i.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενής του στο σημείο Α.

**ii.** Να βρεθεί το σημείο Β, το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του Α σε αυτόν τον κύκλο.

**18.** Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(-8,1)$, $B(4,5)$, $\Gamma(-4,9)$.

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

**β)** Να δείξετε ότι ο κύκλος $(C)$ με κέντρο το σημείο Κ και διάμετρο το τμήμα ΑΒ, διέρχεται απ’ το σημείο Γ.

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου $(C)$.

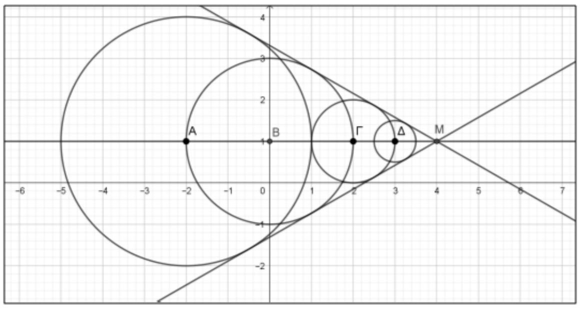
**19.** Έστω κύκλος $(C)$ με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$ και ευθεία $(\varepsilon)$ με εξίσωση $3x + 4y - 1 = 0$.

**α)** Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου $(C)$.

**β)** Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ από την ευθεία $(\varepsilon)$ είναι ίση με $2$.

**γ)** Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon)$ εφάπτεται στον κύκλο $(C)$.

**20.** Επιστήμονες προκειμένου να μελετήσουν υδρόβιο έντομο κατέγραψαν στιγμιότυπα από τους ομόκεντρους κύκλους με κέντρα τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta$ και ακτίνες $3, 2, 1, \frac{1}{2}$ αντίστοιχα, που σχηματίζονται σε κάθε προσγείωση του στο νερό. Η εικόνα από τις εναέριες λήψεις αποτυπώθηκαν σε σύστημα αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα. Το έντομο κινούμενο ευθύγραμμα περνάει από τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta$ για να καταγραφεί την στιγμή που καταλήγει στο σημείο $M$.




**α)** Να βρείτε την εξίσωση της πορείας του εντόμου.

**β)** **i.** Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon_1): y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3 - 4\sqrt{3}}{3}$ είναι κοινή εφαπτόμενη των τεσσάρων κύκλων.

**ii.** Να βρείτε την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτομένης.

**γ)** Με βάση το μοτίβο που ακολουθούν οι κινήσεις του εντόμου να βρείτε ότι η τελική θέση του εντόμου είναι το σημείο $M(4,1)$.

Δίνεται ότι: $\varepsilon\varphi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**21.** Το κέντρο $K$ ενός κύκλου $(C)$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και είναι σημείο της ευθείας $(\varepsilon): y = 2x - 1$. Ο κύκλος $(C)$ έχει ακτίνα $\rho = 3\sqrt{2}$ και η ευθεία $(\zeta): x + y - 2 = 0$ εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο $A$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου $(C)$ είναι $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 18$.

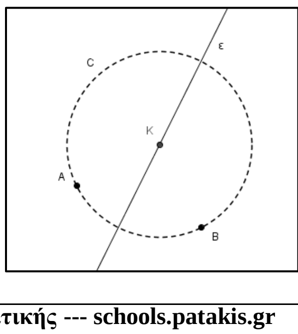
**β)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** η εξίσωση της ευθείας ΚΑ είναι η $x - y + 2 = 0$,

**ii.** οι συντεταγμένες του Α είναι $(0,2)$.

**γ)** Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΛΜ, όπου Μ και Λ είναι τα σημεία τομής της ευθείας $(\varepsilon)$ με τον κύκλο $(C)$.

**22.** Τα σημεία $A(3,2)$ και $B(6,1)$ βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο $(C)$ από το κέντρο $K$ του οποίου διέρχεται η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 7$. Να βρείτε:

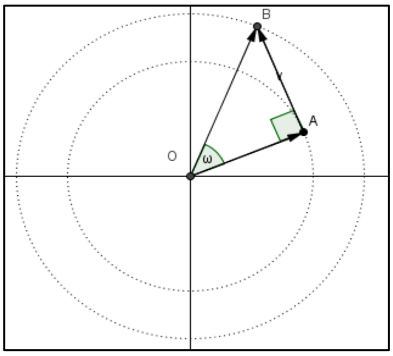



**α)** τις συντεταγμένες του κέντρου $K$ του κύκλου $(C)$,

**β)** την ακτίνα $R$ του κύκλου $(C)$,

**γ)** την εξίσωση του κύκλου $(C)$.

23. Θεωρούμε τα σημεία $A=(\text{συν}\theta,\text{ημ}\theta)$ και $B=(\text{συν}\theta-\text{ημ}\theta,\text{ημ}\theta+\text{συν}\theta)$, όπου $\theta\in[0,2\pi)$.

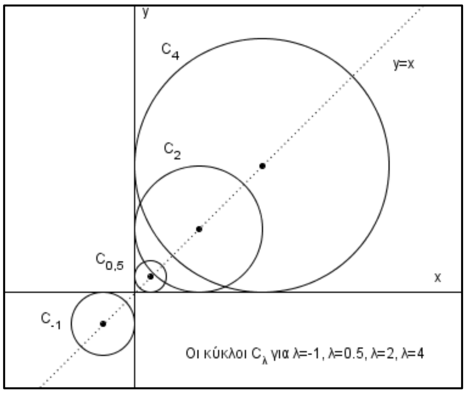



**α)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ανήκουν σε δύο κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

**β)** Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$.

**γ)** Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ω μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

**24.** Δίνεται η οικογένεια κύκλων $(C_\lambda):(x-\lambda)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2$ με $\lambda\neq 0$.



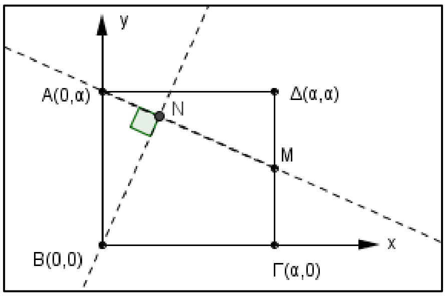

**α)** Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα κάθε κύκλου $(C_\lambda)$, $\lambda\neq 0$.

**β)** Να αποδείξετε ότι το κέντρο κάθε κύκλου $(C_\lambda)$ βρίσκεται στην ευθεία $y=x$.

**γ)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x=0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους $(C_\lambda)$, $\lambda\neq 0$. Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y=0$.

**δ)** Έστω $\alpha\neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x=\alpha$ εφάπτεται σε έναν, και μόνο έναν, από τους κύκλους $(C_\lambda)$. Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y=\alpha$.

**25.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με μήκος πλευράς $\alpha\,(\alpha>0)$ και κορυφές $A(0,\alpha)$, $B(0,0)$, $\Gamma(\alpha,0)$ και $\Delta(\alpha,\alpha)$. Μ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ και το τμήμα ΒΝ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΜ, όπως φαίνεται στο σχήμα.




**α)** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών:

**i.** ΑΜ , **ii.** ΒΝ .

**β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ν .

**γ)** Να αποδείξετε ότι το σημείο Ν ανήκει σε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα ίση με α . Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου αυτού.

**26.** Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y=0\ (1)$, και η ευθεία $(\varepsilon): x-2y+3=0$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(1)$ παριστάνει κύκλο $(C)$ του οποίου να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ.

**β)** Να εξετάσετε αν η ευθεία $(\varepsilon)$ έχει κοινά σημεία με τον κύκλο $(C)$.

**γ)** Να βρείτε τις εφαπτόμενες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ του κύκλου $(C)$ που είναι κάθετες στην ευθεία $(\varepsilon)$.

**δ)** Να αποδείξετε ότι $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=2\rho$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό;

**27.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου $x^2+y^2=4$ και το τυχαίο σημείο του $M(x_1,\ y_1)$, $0<x_1<2$ ανάμεσα στα Α, Β.

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο Μ και τις συντεταγμένες των σημείων τομής της $K$, $\Lambda$ με τους άξονες.

**β)** Να αποδείξετε ότι το μήκος d του τμήματος ΚΛ είναι $d=\dfrac{8}{x_1y_1}$.

**γ)** Να βρείτε το μήκος $d_o$ του τμήματος ΚΛ όταν $x_1=\sqrt{2}$.

**δ)** Να αποδείξετε ότι, όταν το Μ κινείται στο τεταρτοκύκλιο, τότε: $d\ge d_o$.

**28.** Θεωρούμε τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,4)$.

**α)** Να βρείτε όλα τα σημεία Μ στον άξονα ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ.

**β)** Να βρείτε την εξίσωση κύκλου $(C)$ με διάμετρο ΑΒ.

**γ)** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος $(C)$ διέρχεται από τα σημεία Μ που προσδιορίσατε στο ερώτημα **α).** Κατόπιν, να το επιβεβαιώσετε γεωμετρικά.

**29.** **α)** Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=x+2$, $(\varepsilon_2): y=x-2$ και τα σημεία $A(-2,0)$, $B(2,0)$ των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ αντίστοιχα.

**i.** Να αποδειχθεί ότι $(\varepsilon_1)\ //\ (\varepsilon_2)$.

**ii.** Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου $M$, του $AB$.

**iii.** Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

**β)** Ο κύκλος $(K,\rho)$ έχει την ιδιότητα να εφάπτεται των ευθειών $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$. Αν το κέντρο Κ του κύκλου $(K,\rho)$ ανήκει στην ευθεία $(\eta): x=\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε:

**i.** Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου $K$, συναρτήσει του $\lambda$.

**ii.** Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ είναι ανεξάρτητη του $\lambda$ και να γράψετε την εξίσωση που παριστάνει όλους τους κύκλους $(K,\rho)$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

**30.** Δίνεται ο κύκλος $(C)$ με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$ και το σημείο $A(3,1)$.

**α)** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου και να αποδείξετε οτι το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου.

**β)** **i.** Να αποδείξετε οτι οι ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο $(C)$ και διέρχονται από το σημείο Α έχουν εξισώσεις $(\varepsilon_1): 2x-y=5$ και $(\varepsilon_2): x+2y=5$.

**ii.** Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, όπου $B$ και $\Gamma$ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των ευθειών $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$ με τον κύκλο.

**31.** Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις $(C_1): x^2+y^2-6x+5=0$ και $(C_2): x^2+y^2=1$.

**α)** Να δείξετε ότι:

**i.** η εξίσωση του κύκλου $(C_1)$ γράφεται στη μορφή $(x-3)^2+y^2=4$,

**ii.** οι κύκλοι $(C_1),(C_2)$ εφάπτονται εξωτερικά.

**β)** Να βρείτε:

**i.** το σημείο επαφής των δύο κύκλων $(C_1)$ και $(C_2)$,

**ii.** την εξίσωση της εσωτερικής κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων $(C_1)$ και $(C_2)$.

**γ)** Αν τα σημεία $M_1, M_2$ διατρέχουν τους κύκλους $(C_1),(C_2)$ αντίστοιχα, να βρείτε τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα στα σημεία αυτά.

**32.** Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2+(y+2)^2=2(x+3)$ $(1)$.

**α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση $(1)$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2,-2)$ και ακτίνα $\rho=3$.

**β)** Να δείξετε ότι η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon)$ η οποία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία Α και Β ώστε η αρχή των αξόνων να είναι το μέσο της χορδής ΑΒ.

**δ)** Αν η ευθεία $(\varepsilon)$ του προηγούμενου ερωτήματος έχει εξίσωση $y=x$ τότε να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΚΑΒ.

**33.** Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος $(c_1)$ με εξίσωση $(c_1):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2$.

**α)** Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\overline{NA}^2+\overline{NB}^2=4$, ανήκουν στην ευθεία $(\varepsilon)$ με εξίσωση $y=-x-2$.

**β)** Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων P του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2+2y^2+10x+14y+21=0$, ανήκουν σε κύκλο $(c_2)$ κέντρου $\Lambda\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R=2\sqrt{2}$.

**γ) i.** Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι $(c_1)$ και $(c_2)$ εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους.

**ii.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon)$ είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων $(c_1)$ και $(c_2)$.

**34.** Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας $(\zeta)$ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

**β)** Αν Κ είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας $(\zeta)$, να βρείτε την εξίσωση $(c)$ όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο Κ και διέρχονται από τα σημεία Α και Β, συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

**γ)** Αν η εξίσωση $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+1,\ \lambda\in\mathbb{R}$, παριστάνει όλους τους κύκλους $(c)$ του ερωτήματος **β),** τότε:

**i.** Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

**ii.** Να αποδείξετε οτι η ευθεία $(\varepsilon): x+\lambda y-1=0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους $(c)$ στο σημείο $A(1,0)$.

**35.** Δίνεται το τετράγωνο $MM_1OM_2$ με $M(4,4)$, $M_1(4,0)$, $M_2(0,4)$. Αν $O$ η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

**α)** Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου $MM_1OM_2$ έχει εξίσωση $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=8$.

**β)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): x+y=8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου $(C)$.

**γ)** Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας $(\varepsilon)$ με τον κύκλο $(C)$.

**36.** Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,4)$, $\Gamma(3,1)$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η $B\hat{A}\Gamma=90^o$.

**β)** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου $(c)$, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A$ , $B$ και $\Gamma$ .

**γ)** Αν ο κύκλος $(c)$, έχει εξίσωση $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

**37.** Οι κορυφές Α και Γ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι τα σημεία $(1,4)$ και $(3,0)$ αντιστοίχως.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ γράφεται στη μορφή $y-2=\frac{1}{2}(x-2)$.

**β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ γράφεται στη μορφή $(x-2)^2+(y-2)^2=5$.

**γ)** Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών Β, Δ του τετραγώνου.

**38.** Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy η εξίσωση $3x+4y=25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $2$ .

**α)** **i.** Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού;
Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό.

**ii.** Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή;

**β)** Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x+y+\lambda-2=0$, με $\lambda\neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού;

**39.** Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB}=(\lambda,\lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(3\lambda,\lambda-1)$ και το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)$.

**β)** Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma=90^{o}$.

**i.** Να υπολογίσετε το $\lambda$.

**ii.** Αν $\lambda=\frac{1}{2}$ και $A\left(2,\frac{3}{2}\right)$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

**40.** Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x,y)$, $A(-1,0)$, $B(1,0)$ για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=9\left|\overrightarrow{AB}\right|$$

**α)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=8$.

**β)** Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2=32$.

**i.** Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

**ii.** Αν το σημείο Μ κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{M\Gamma}\cdot\overrightarrow{M\Delta}$.

**41.** Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο $O(0,0)$ θεωρούμε τους κύκλους $(K,R)$ και $(\Lambda,\rho)$ με εξισώσεις $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ $(1)$ και $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ $(2)$ αντίστοιχα.

**α)** Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων.

**β)** Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

**γ)** Έστω Μ, Ν τυχαία σημεία των κύκλων $(K,R)$ και $(\Lambda,\rho)$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων Μ και Ν.

**42.** Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda x+\lambda y+\lambda-1=0$ $(1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(1)$, παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

**β)** Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση $(1)$, ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $(\varepsilon): x+y+2=0$.

**γ)** Για $\lambda=1$, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση $(1)$, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

**43.** Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Ο θεωρούμε κύκλο $(C)$ και ευθεία $(\varepsilon)$ με εξισώσεις $x^2+y^2-9x-3y+10=0$ $(1)$ και $4x+3y-10=0$ $(2)$ αντίστοιχα.

**α) i.** Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα R του κύκλου $(C)$.

**ii.** Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία $(\varepsilon)$ και να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon)$ τέμνει τον κύκλο $(C)$ σε δύο σημεία.

**iii.** Να προσδιορίσετε τα σημεία A και B στα οποία η ευθεία $(\varepsilon)$ τέμνει τον κύκλο $(C)$.

**β)** Αν είναι $A(1,2)$ και $B(4,-2)$, τότε:

**i.** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

**ii.** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο AB διέρχεται από το σημείο O.

**44.** Δίνονται τα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$ με $\alpha,\beta>0$ και $\alpha+\beta=10$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την AB, για κάθε τιμή των α και β είναι:

$$x^2+y^2-\alpha x-(10-\alpha)y=0$$

**β)** Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την AB, για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή O των αξόνων και ένα σημείο P του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

**γ)** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την AB για τις διάφορες τιμές των α και β.

**45.** Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή $\gamma_1$, κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: $A(\lambda-1,2\lambda+1),\ \lambda\in\mathbb{R}$.
- τη γραμμή $\gamma_2$, που περνάει από το σταθμό $\Sigma(-4,2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(-1,3)$.

**α)** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές $\gamma_1$ και $\gamma_2$.

**β)** Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο $K(1,1)$ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές $\gamma_1$ και $\gamma_2$. Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές.

**γ)** Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο K και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής $\gamma_1$.

**46.** Δίνεται η εξίσωση $x(x-4)+y(y-2)=2(x+y-4)\ (1)$.

**α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση $(1)$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

**β)** Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.

**i.** Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

**ii.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB.

**γ)** Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y=\lambda x+4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}$.

**47.** Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\alpha x-4\alpha y=0 \; (1)$, όπου α είναι πραγματικός αριθμός.

**α)** Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση $(1)$ παριστάνει κύκλο.

**β)** Να προσδιορίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του α.

**γ)** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος **α)**.

**δ)** Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση $(1)$ να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

**48.** Τα σημεία $A(-7,-1)$ και $B(3,-5)$ είναι σημεία ενός κύκλου $(C)$ κέντρου Κ. Το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ.

**α)** Να βρείτε:

**i.** τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

**ii.** την εξίσωση της ευθείας ΚΜ.

**β)** Αν από το κέντρο Κ του κύκλου διέρχεται η ευθεία $(\delta): x+y=-12$, τότε:

**i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Κ.

**ii.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου $(C)$.

**49.** Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2,-2)$.

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ .

**β)** Να δείξετε ότι ο κύκλος $(C)$ με διάμετρο ΑΒ έχει εξίσωση $(C): x^2+(y+1)^2=5$.

**γ)** Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB)=5$ ανήκουν στις ευθείες $(\varepsilon_1): x+2y-3=0$ και $(\varepsilon_2): x+2y+7=0$.

**δ)** Να δείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$ εφάπτονται του κύκλου $(C)$.

**50.** Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2-(\lambda+8)x+\lambda y+7=0 \; (1)$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $(1)$ παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

**β)** Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών.

**γ)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν.

**δ)** Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την $(1)$ για $\lambda=0$. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα.

**51.** Δίνεται η εξίσωση $(x-3\lambda)^2+(y+2\lambda)^2=1$ $(1)$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): 2x+3y=0$.

**α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την $(1)$ ανήκουν στην ευθεία $(\varepsilon)$.

**β)** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία $(\varepsilon)$.

**γ)** Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την $(1)$ εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.

**δ)** Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ αντίστοιχα.

**52.** Θεωρούμε τα σημεία $A(-1,2)$, $B(3,2)$, $\Gamma(1,4)$.

**α)** Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

**β)** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ.

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=x+1$.

**γ)** Να βρείτε σημείο Κ στην μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ που ισαπέχει από τα Α, Β .

**δ)** Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

**53.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο του επιπέδου Μ , τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ και Μ είναι συνευθειακά.

**β)** Να αποδείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του ΒΓ .

**γ)** Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\kappa$ και $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\lambda$.

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$, τότε:

**i.** Να αποδείξετε ότι $\kappa=\lambda=0$.

**ii.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες.

**54.** Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2+y^2=1$.

**α)** Αν Α και Α΄ είναι τα σημεία τομής του κύκλου $(C)$ με τους ημιάξονες Οx και $Ox'$ αντίστοιχα, τότε:

**i.** Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και $A'$ είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$.

**ii.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $150^o$.

**β)** Αν η ευθεία $(\varepsilon)$ τέμνει τον κύκλο $(C)$ και στο σημείο Β, να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΒ έχει μήκος $\sqrt{3}$.

**γ)** Αν η ευθεία $(\varepsilon)$ έχει εξίσωση $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\zeta)$ που διέρχεται από τα σημεία $A'$ και Β.

**55.** Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2+y^2=4$ και το σημείο $A\left(2\sqrt{2},0\right)$.

**α)** **i.** Να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου $(C)$.

**ii.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου $(C)$ που διέρχονται από το σημείο Α και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες.

**β)** Αν Β, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου $(C)$ με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο Α, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ.

**56.** Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$, όπου $\alpha, \beta>0$.

**α)** Να βρείτε συναρτήσει των $\alpha$, $\beta$

**i.** τις συντεταγμένες του μέσου $M$ του τμήματος $AB$.

**ii.** την απόσταση $(OM)$.

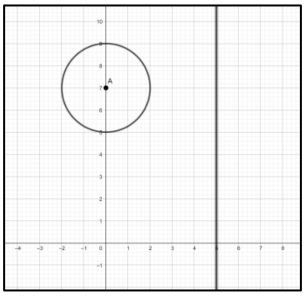
**β)** Αν $(OM)=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$, τότε:

**i.** να αποδείξετε ότι $(OM)=\frac{(AB)}{2}$.

**ii.** να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί.

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $OAB$.

**57.** Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο $(C_1)$ κέντρου $A$ και την ευθεία $(\varepsilon)$ : $x=5$.



**α)** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου $(C_1)$.

**β)** Έστω ένα σημείο του επιπέδου $B(x_1,y_1)$.

**i.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $B(x_1,y_1)$ και ακτίνα $2$.

**ii.** Να βρείτε το μήκος της διακέντρου $AB$ σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου $B$.

**γ)** Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος **β) i.** με ακτίνα $2$, που εφάπτονται εξωτερικά στον $(C_1)$ και στην ευθεία $(\varepsilon)$.

**58.** Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις: $(C_1):(x-2)^2+(y-3)^2=8$ και $(C_2):(x-7)^2+(y+2)^2=18$.

**α)** Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $(\mathrm{K}\Lambda)$, όπου $\mathrm{K}, \Lambda$ τα κέντρα των κύκλων $(C_1), (C_2)$ αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

**β)** **i.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ .

**ii.** Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο $(\mathrm{C}_1)$ και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.

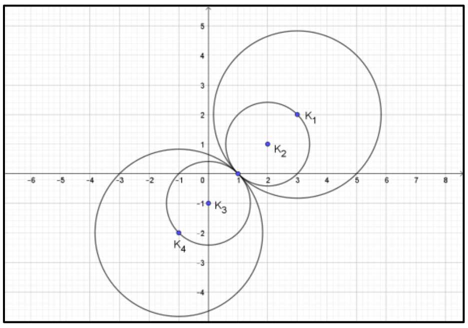
**γ)** Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

**59.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda+1)x - 2\lambda y + 2\lambda + 1 = 0$ (1) , όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $(1)$ παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου Κ και την ακτίνα ρ .

**β)** Τι παριστάνει η εξίσωση $(1)$ για $\lambda = 0$;

**γ)** Στο σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4$ που προκύπτουν από την $(1)$ για 4 αντίστοιχες τιμές του λ. Αξιοποιώντας το σχήμα,




**i.** να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την $(1)$ βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

**ii.** να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την $(1)$ διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

**iii.** να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): x + y - 1 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την $(1)$.

**60.** Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1$ $(1)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η $(1)$ παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

**β)** Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την $(1)$ για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

**γ)** Αν $\mathrm{A}(1,0)$ και $\mathrm{B}(3,0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.

**δ)** Αν ένα σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ επαληθεύει την $(1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$.

**61.** Δίνονται οι κύκλοι $(\mathrm{C}_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ και $(\mathrm{C}_2): (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$ .

**α)** Να δείξετε ότι τα κέντρα Κ, Λ των κύκλων $(C_1)$ και $(C_2)$ αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ του συστήματος συντεταγμένων.

**β)** Να βρείτε τα σημεία τομής Β, Γ των κύκλων $(C_1)$ και $(C_2)$.

**γ)** Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα Β, Γ να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ.

**62.** Δίνονται οι εξισώσεις $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ $(1)$ και $(C_2): x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ $(2)$.

**α)** Να δείξετε ότι οι $(1)$ και $(2)$ είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1,0)$, $\Lambda(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα.

**β)** **i.** Να βρείτε το μήκος της διακέντρου $(K\Lambda)$.

**ii.** Να δείξετε ότι ο κύκλος $(C_2)$ εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου $(C_1)$.

**γ)** Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου $(C_1)$ που εφάπτονται στον κύκλο $(C_2)$.

**63.** Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0$ και $(\varepsilon_2): (\mu+1)x + (\mu-1)y - \mu + 1 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι οι $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$ παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου $\mu$.

**β)** Να αποδείξτε ότι η οξεία γωνία των ευθειών $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$ είναι $45^o$ για κάθε τιμή της παραμέτρου $\mu$.

**γ)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$ ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

**64.** Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(5,5)$.

**α)** Αν για το σημείο $M(x,\psi)$ ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 32$, να αποδείξετε ότι:

**i.** το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 6\psi - 6x + 10 = 0$ $(1)$.

**ii.** η εξίσωση $(1)$ παριστάνει κύκλο.

**β)** Αν το κέντρο του κύκλου είναι το $K(3,3)$ και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$:

**i.** Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία $(\varepsilon): \lambda x + \psi = 2$ εφάπτεται του κύκλου $(1)$.

**ii.** Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία $(\varepsilon)$ σχηματίζει με την ΑΒ γωνία $45^o$;

**65.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4-2k)x - 2(1+k)y + 5 - 2k = 0$ $(I)$, όπου $k \in (0,+\infty)$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η $(I)$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k-2, k+1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$.

**β)** Να αποδείξετε ότι το σημείο $M$ ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$.

**γ)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$.

**66.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\kappa x - 2\kappa y + 4 = 0$ $(1)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

**α)** Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(1)$ να παριστάνει κύκλο.

**β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

**γ)** Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

**δ)** Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης $(1)$ στο σημείο $\Gamma(2,2)$.

**67.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

**α)** Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

**β)** Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3,2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

**γ)** Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το Μ.

**68.** Δίνονται οι κύκλοι $(C_1): x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ και $(C_2): x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$.

**α)** Να δείξετε ότι οι κύκλοι $(C_1)$ και $(C_2)$ έχουν κέντρα $K\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$ αντίστοιχα.

**β)** **i.** Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων $(C_1)$ και $(C_2)$.

**ii.** Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες.

**69.** Δίνεται ο κύκλος $(C): (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία $(\varepsilon): 2x + y + 5 = 0$.

**α)** Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου $(C)$.

**β)** Να δείξετε ότι ο κύκλος $(C)$ και η ευθεία $(\varepsilon)$ δεν έχουν κοινά σημεία.

**γ)** Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1), (\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $(\varepsilon)$ και εφάπτονται του κύκλου $(C)$ και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

**δ)** Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1), (\eta_2)$.