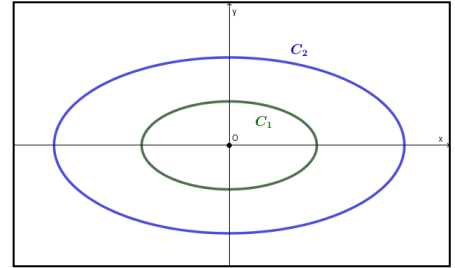


3.3 Η Έλλειψη

1. Δίνονται οι ελλείψεις $(C_1): x^2 + 4y^2 = 4$, $(C_2): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ και οι γραφικές τους παραστάσεις στο σχήμα.



- α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων.
β) Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές.

2. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- α) Να δικαιολογήσετε ότι $\alpha = 4$, $\beta = 2$ και $\gamma = 2\sqrt{3}$.
β) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης (c) .
γ) Να σχεδιάσετε την έλλειψη (c) και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

3. Η έλλειψη (C) έχει εστίες τα σημεία $E(3,0)$, $E'(-3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(4, \frac{12}{5}\right)$.

- α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10.
β) Να βρείτε την εξίσωση της (C) .

- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της (C) στο σημείο της $M\left(4, \frac{12}{5}\right)$.

Δίνεται ότι $\sqrt{1369} = 37$.

4. Η έλλειψη (C) έχει εστίες τα σημεία $E(4,0)$, $E'(-4,0)$ και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της (C) ,
β) την εκκεντρότητά της (C) ,

- γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της (C) στο σημείο της $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$.

5. Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

- α) Να βρείτε τις εστίες της.
β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

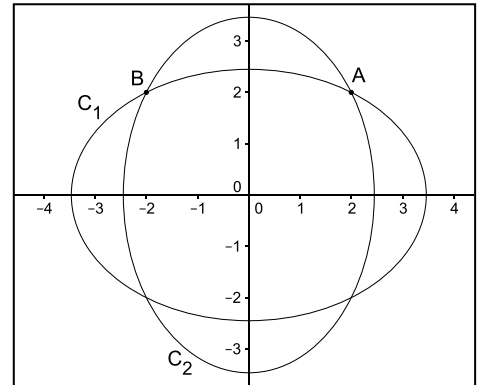
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της (C) και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

6. Δίνονται οι ελλείψεις $(C_1): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ και $(C_2): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ_1) της έλλειψης (C_1) στο σημείο A και η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ_2) της έλλειψης (C_2) στο σημείο B είναι αντίστοιχα $x + 2y - 6 = 0$ και $-2x + y - 6 = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ είναι κάθετες.



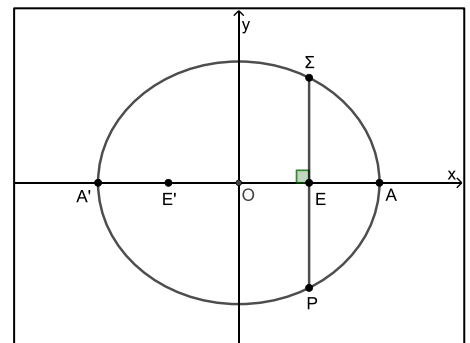
7. Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A)' = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

β) Έστω Σ και Ρ τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τεταγμένη με την εστία $E(2,0)$. Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το Ρ αρνητική τεταγμένη.

i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2,3)$ και $P(2,-3)$.

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣΡ.



8. Η έλλειψη του σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5,0)$, $A(5,0)$, $B'(0,-4)$ και $B(0,4)$.

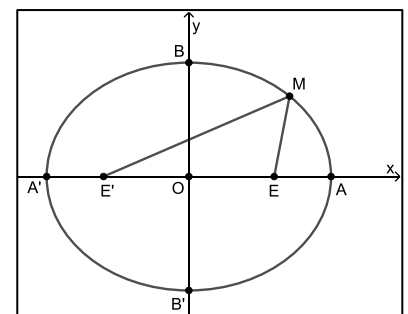
α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι $(A'A) = 10$ και $(B'B)' = 8$,

ii. οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$.

β) Έστω Μ ένα σημείο της έλλειψης.

Να αποδείξετε ότι $(ME')' + (ME) = 10$.



9. Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Οι εστίες της E και E' , έχουν συντεταγμένες $E(\dots, \dots)$ και $E'(\dots, \dots)$. Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με και η εκκεντρότητα της είναι ίση με

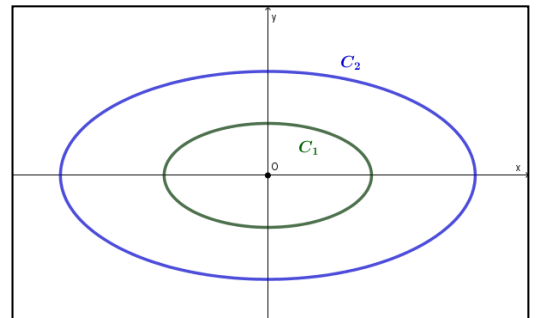
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της $B(0, -2)$.

10. Δίνονται οι ελλείψεις $(C_1): x^2 + 4y^2 = 4$, $(C_2): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ και

οι γραφικές τους παραστάσεις στο σχήμα.

α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων.

β) Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές.



11. Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$ (1).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E' .

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $B(0, 9)$ είναι σημείο της έλλειψης.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της $B(0, 9)$.

12. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης και την απόστασή τους,

β) το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης,

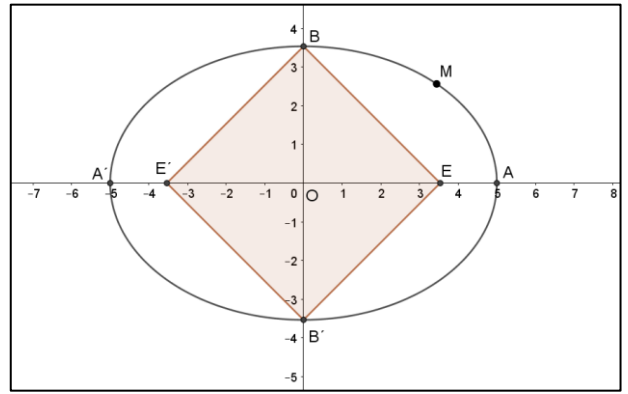
γ) την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της $B(0, 4)$.

13. Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $(C): 16x^2 + 25y^2 = 400$.

α) Να βρείτε τα μήκη BB' , AA' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της E και E' .

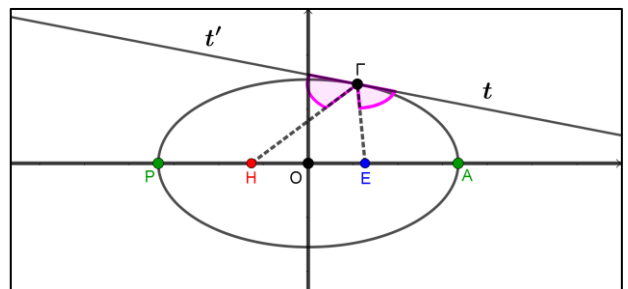
β) Αν $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$, να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το E και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

14. Στο σχήμα δίνεται η έλλειψη (C) με κέντρο το $O(0,0)$, εστίες τα σημεία E, E' και κορυφές τα σημεία $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, B, B' . Αν είναι γνωστό ότι το τετράπλευρο $BEB'E'$ είναι τετράγωνο, να βρείτε:



- α) τις συντεταγμένες των σημείων B, B', E, E' ,
- β) την εξίσωση της έλλειψης (C).
- γ) Έστω M τυχαίο σημείο της (C), που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα A, A' .
- να αποδείξετε ότι όλα τα τρίγωνα EME' έχουν την ίδια περίμετρο την οποία να προσδιορίσετε.
 - να βρείτε τις συντεταγμένες του M για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου EME' παίρνει τη μέγιστη τιμή του, την οποία και να προσδιορίσετε.
15. Έστω $K(x,y)$ μεταβλητό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $(KE) + (KE') = 10$, όπου $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$.
- α) Να βρείτε το είδος της καμπύλης (C) πάνω στην οποία κινείται το σημείο K και να γράψετε την εξίσωσή της, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- Έστω (C): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και (ε): $3x + 5y = 25$.
- β) Να αποδείξετε ότι (C) και (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.
- γ) Να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β) και να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα την έλλειψη (C) και την ευθεία (ε).
- δ) Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{EME'}$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

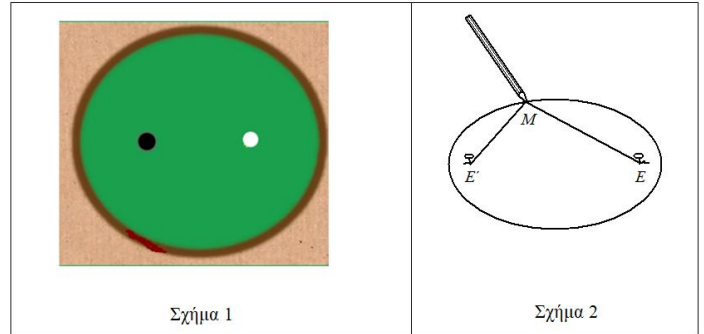
16. Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι μια έλλειψη με μία εστία τον Ήλιο. Η ελάχιστη απόσταση του κέντρου της Γης από το κέντρο του Ήλιου είναι $PH = 147,5$ εκατομμύρια Km και η μέγιστη $AH = 152,5$ εκατομμύρια Km. Στο σχήμα θεωρούμε ότι τα σημεία H και Γ είναι τα κέντρα του Ήλιου και της Γης αντίστοιχα. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το μέσο του HE και $x'x$ τον μεγάλο άξονα της έλλειψης, ενώ ο άξονας $y'y$ είναι η μεσοκάθετος του HE .



- α) Να αποδείξετε $(PA) = 300$ εκατομμύρια Km, $(HE) = 5$ εκατομμύρια Km και ότι η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon = \frac{1}{60}$.
- β) Για μια τυχαία θέση της Γης πάνω στην ελλειπτική τροχιά, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου HGE .

γ) Αν ονομάσουμε t' την εφαπτομένη ευθεία της έλλειψης στο Γ , να αποδείξετε ότι οι γωνίες $t'\hat{\Gamma}H$ και $t'\hat{\Gamma}E$ είναι ίσες.

17. Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο E' . Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία E και E' δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράψει έλλειψη (C) όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).



α) Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης (C) .

β) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης (C) και να βρείτε την εκκεντρότητά της.

γ) Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα 1) ακριβώς στο σημείο E . Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης (C) πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:

i. μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα.

ii. μόνο στα άκρα του μικρού άξονα.

iii. μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα.

iv. σε οποιοδήποτε σημείο της (C) εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα.

Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσεως αιτιολογώντας την απάντησή σας.

18. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i. των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii. των εστιών E και E' της έλλειψης.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0,4)$ και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1).