

1.4 Εφαρμογές των παραγώγων

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.
 - α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.
 - β) Να βρείτε την $f'(5)$.
 - γ) Για $x > 1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.
 - α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 3x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$.
 - β) Να υπολογίσετε το $f'(0)$.
 - γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

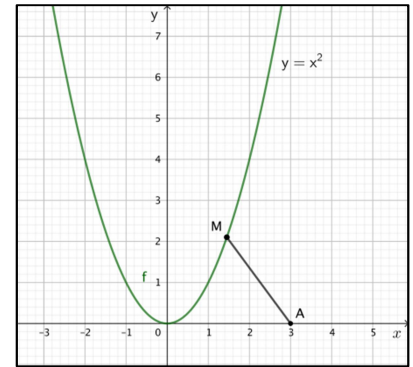
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6x + 2023$, $x \in \mathbb{R}$.
 - α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.
 - β) Να υπολογίσετε το $f'(1)$.
 - γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, για $x > 1$.

4. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^2 - 4t - 1$, $t \geq 0$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα (s) και το $x(t)$ σε μέτρα (m).
 - α) Να βρείτε την ταχύτητα $v(t)$ του σημείου σε χρόνο t .
 - β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του υλικού σημείου τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1$ s και $t_2 = 3$ s.
 - γ) Σε ποια χρονική στιγμή το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο;
 - δ) Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.
 - α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.
 - β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
 - γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 5$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6x + 2023$, $x \in \mathbb{R}$.
 - α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.
 - β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 - γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2020$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, και το σημείο $A(3,0)$, όπως φαίνονται στο σχήμα. Αν $M(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f , τότε:



- α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση AM , συναρτήσει του x , είναι

$$d(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}, x \in \mathbb{R}.$$

- β) i. Να αποδείξετε ότι $2x^3 + x - 3 = (x-1)(2x^2 + 2x + 3)$.

- ii. Να βρείτε για ποιο σημείο M η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη.

Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόρριζο $x^4 + x^2 - 6x + 9$, $x \in \mathbb{R}$, γίνει ελάχιστο.

- γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση AM .

8. Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος του σε μέτρα (m) μετά από t δευτερόλεπτα (s) από την εκτόξευσή του δίνεται από την συνάρτηση $h(t) = 8t - t^2$, $0 \leq t \leq 8$.

- α) Να υπολογίσετε το ύψος του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s.

- β) Να αποδείξετε ότι η ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t δίνεται από τη συνάρτηση $v(t) = 8 - 2t$, $0 \leq t \leq 8$.

- γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s.

- δ) Σε ποια χρονική στιγμή το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος; Ποιο είναι το μέγιστο ύψος του σώματος;

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονotonία.

- γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - x - 4$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

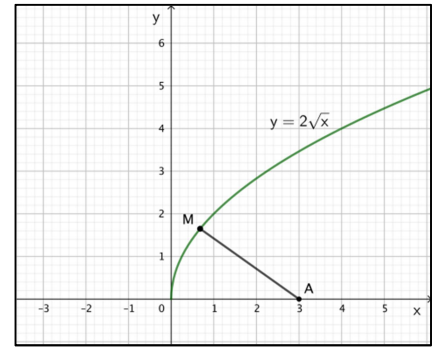
- α) την παράγωγο της συνάρτησης f ,

- β) τα ακρότατα της συνάρτησης f ,

- γ) i. τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτόμενη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 3$,

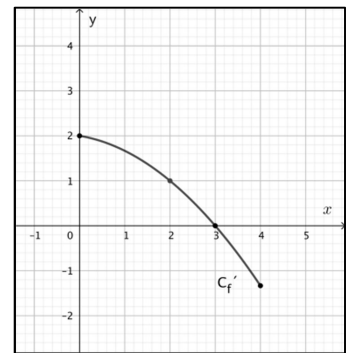
- ii. να δείξετε ότι η μια από τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f με συντελεστή διεύθυνσης 3 και σημείο επαφής με αρνητική τετμημένη διέρχεται από το σημείο $M\left(3, \frac{31}{3}\right)$,

11. Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$, και το σημείο $A(3,0)$, όπως φαίνονται στο σχήμα. Αν $M(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f , τότε:



- α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση AM , συναρτήσει του x , είναι $d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$, $x \geq 0$.
- β) Να βρείτε για ποιο σημείο M η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη. Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόρριζο $x^2 - 2x + 9$, $x \geq 0$, γίνει ελάχιστο.
- γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση AM .

12. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολωνυμικής συνάρτησης f η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$. Η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $(2,1)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη 3. Μελετώντας το σχήμα να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:



- α) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = 2$;
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $[0,3]$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 3$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$, $x > 0$.

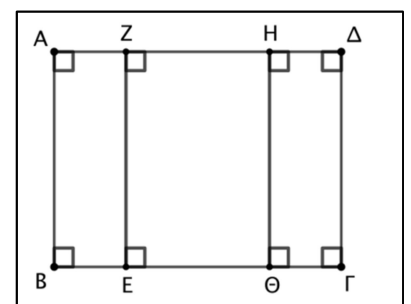
- α) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$ και το πρόσημο της f' .
- β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
- γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x > 0$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = 6x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

- γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 5}{g'(x) - 10}$.

15. Ένας αγρότης διαθέτει συρματόπλεγμα μήκους 200 m και να θέλει να περιφράξει με αυτό σε ένα χωράφι του μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με δύο ενδιάμεσα χωρίσματα EZ και ΘH , όπως φαίνεται στο σχήμα.



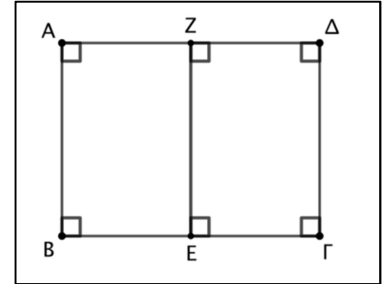
α) Αν $AD = x$ και $AB = y$, να αποδείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν του σχήματος, συναρτήσει του x , είναι

$$E(x) = \frac{100x - x^2}{2}, 0 < x < 100.$$

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου $ABΓΔ$ ώστε το συνολικό εμβαδόν του να είναι μέγιστο.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του ορθογωνίου $ABΓΔ$ του σχήματος.

16. Ένας αγρότης διαθέτει συρματοπλέγμα μήκους 200 m και θέλει να περιφράξει με αυτό σε ένα χωράφι του μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου $ABΓΔ$ με ενδιάμεσο χώρισμα EZ , όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν $AD = x$ και $AB = y$, να αποδείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν του

σχήματος, συναρτήσει του x , είναι $E(x) = \frac{200x - 2x^2}{3}, 0 < x < 100.$

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου $ABΓΔ$ ώστε το συνολικό εμβαδόν να είναι μέγιστο.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του σχήματος.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + c, x \in \mathbb{R}$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το c αν ισχύει $f(2) + f'(2) + f''(2023) = 0$.

Για $c = 2$:

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2023), f(2024)$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

γ) i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

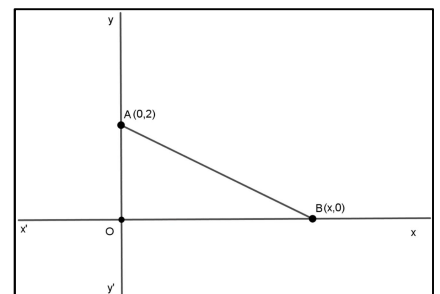
ii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

δ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2023)$ και $f(2301)$ της συνάρτησης f .

19. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $A(0,2)$ και $B(x,0)$ με $x > 0$.

α) Να δείξετε ότι η απόσταση των σημείων A και B συναρτήσει του x

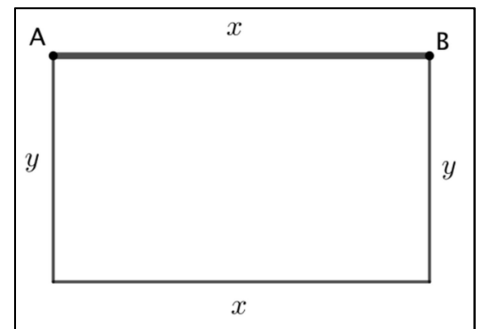
είναι $d(x) = (AB) = \sqrt{x^2 + 4}$ με $x > 0$.



β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων A και B ως προς x όταν $x = 3$.

γ) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι, καθώς το σημείο B κινείται προς τα δεξιά στον ημιάξονα Ox, το μήκος του AB αυξάνεται. Να αιτιολογήσετε γιατί συμβαίνει αυτό, αξιοποιώντας το ερώτημα β).

20. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x , y ώστε να έχει εμβαδόν 800 m^2 . Η πλευρά AB της περιοχής, μήκους x , όπως φαίνεται στο σχήμα, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει του x , είναι $K(x) = 8x + \frac{3200}{x}$, $x > 0$.

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο.

γ) Ποιο είναι το ελάχιστο κόστος περίφραξης;

21. Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) ενός δωματίου σε συνάρτηση με τον χρόνο t σε ώρες δίνεται από τον τύπο $\theta(t) = t^3 - 3t^2 + 2t + c$, $0 \leq t \leq 4$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

α) Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του δωματίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με 8 βαθμούς Κελσίου, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού c .

Για $c = 8$:

β) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας όταν $t = 2$.

γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας γίνεται ελάχιστος και την τιμή του ελάχιστου ρυθμού μεταβολής.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για $\lambda = 3$:

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{7}{3}\right)$ και $f\left(\frac{13}{4}\right)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - x}$.

23. Μια επιχείρηση παραγωγής αιθέριων ελαίων εκτιμά ότι το ημερήσιο κόστος $C(x)$ (σε εκατοντάδες ευρώ) για την παραγωγή x κιλών λεβάντας είναι $C(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 30$, $x \geq 0$.

α) Πόσο είναι το ημερήσιο κόστος για την παραγωγή 2 κιλών λεβάντας;

β) Να υπολογίσετε το $C(0)$. Τι εκφράζει;

γ) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $C(x)$.

δ) Να βρείτε πόσα κιλά λεβάντας πρέπει να παράγονται ημερησίως ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος. Πόσο είναι το ελάχιστο ημερήσιο κόστος;

24. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός.

α) i) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

ii) Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Για $\alpha = 1$:

β) να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

γ) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - 1}$.

25. Ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα, πλάτος y μέτρα και περίμετρο 200 μέτρα.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = 100x - x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

γ) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο, και ποια είναι η μέγιστη τιμή του; Για την τιμή που βρήκατε τι σχήμα προκύπτει;

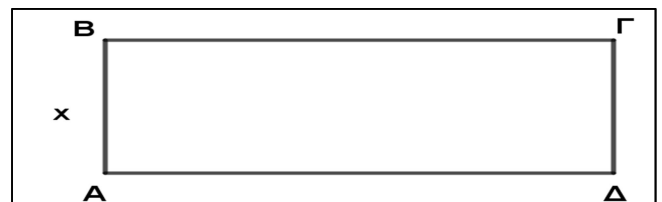
26. Δίνεται το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος με εμβαδόν 4 m^2 .

α) Αν το μήκος της πλευράς $AB = x \text{ m}$, να δείξετε ότι η πλευρά $B\Gamma$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ συναρτήσει του x είναι $B\Gamma = \frac{4}{x}$, $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι, η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$, $x > 0$.

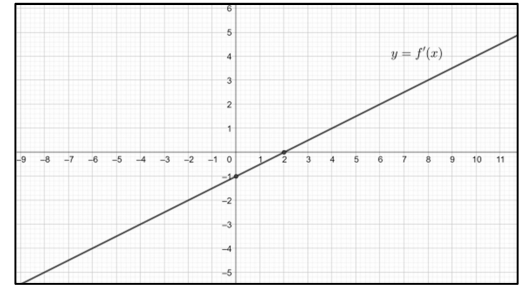
γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με σταθερό εμβαδό, παίρνει την ελάχιστη τιμή της, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



27. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , τέτοια ώστε $f(2) = 5$ και $f(0) = 6$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' της συνάρτησης, η οποία είναι ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -1 .

- α) Να αιτιολογήσετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.
- β) Να βρείτε τα ακρότατα της f .
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$.



28. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 8x + 18$ και $g(x) = -(x-4)^4 + 2$.

- α) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων f και g .
- β) Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων αυτών.
- γ) Να δείξετε ότι $f(x) \geq g(x), x \in \mathbb{R}$.

29. Δύο θετικοί αριθμοί x, y συνδέονται με τη σχέση $2x + y = 20$.

- α) i. Να δείξετε ότι το γινόμενο των δύο αριθμών, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $f(x) = -2x^2 + 20x$.
- ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης.
- β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- γ) Να βρείτε τη τιμή του x ώστε το γινόμενο των δύο αριθμών να γίνει μέγιστο.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .
- β) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, 1)$.

31. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $AB = 4$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία K, Λ, M και N των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα έτσι ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N = x$.

α) Να δείξετε ότι:

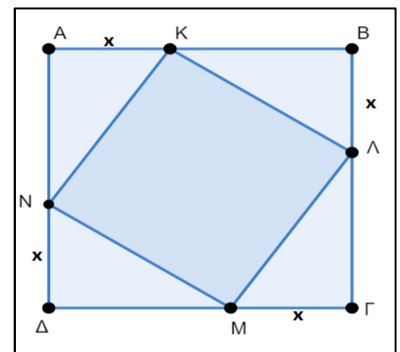
i. το εμβαδόν του AKN ως συνάρτηση του x είναι

$$E_1(x) = \frac{1}{2}(4-x) \cdot x, x \in (0, 4).$$

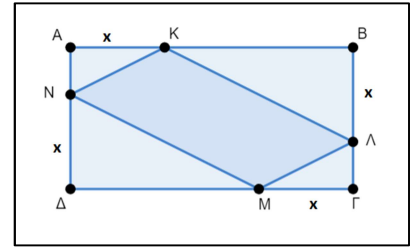
ii. το εμβαδόν του $K\Lambda M N$ ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = 2(x^2 - 4x + 8), x \in (0, 4)$.

β) Να υπολογίσετε τη πρώτη παράγωγο του εμβαδού $E(x)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.



32. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ = 4 και ΒΓ = 2. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Κ, Λ, Μ και Ν των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΜ = x.



α) Να δείξετε ότι:

- i. το εμβαδόν του ΑΚΝ ως συνάρτηση του x είναι

$$E_1(x) = \frac{1}{2}(2-x) \cdot x, \quad x \in (0,2)$$
 και το εμβαδόν του ΚΒΛ ως συνάρτηση του x είναι

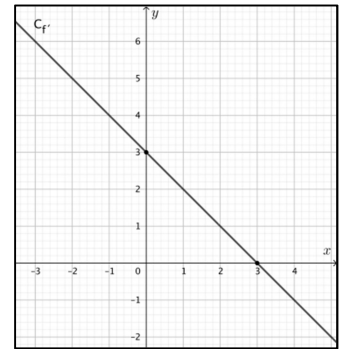
$$E_2(x) = \frac{1}{2}(4-x) \cdot x, \quad x \in (0,2).$$

- ii. το εμβαδόν του ΚΛΜΝ ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = 2 \cdot (x^2 - 3x + 4)$, $x \in (0,2)$.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς το x όταν $x = \frac{3}{2}$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x, για την οποία το E(x) γίνεται ελάχιστο.

33. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f. Αν η $C_{f'}$ είναι ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο (3,0), τότε:



α) Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(3)$ και $f(4)$.

γ) Να βρείτε το είδος και την τιμή του ακροτάτου που παρουσιάζει η f αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι: $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$, είναι η

$$\text{ευθεία } (\epsilon): y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}.$$

35. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και εμβαδό 400 τετραγωνικά μέτρα (m^2).

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(x) = 2x + \frac{800}{x} \text{ με } x > 0.$$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\Pi(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

γ) Για ποια τιμή του x η περίμετρος του οικοπέδου γίνεται ελάχιστη, και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της;

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Για $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .

ii. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

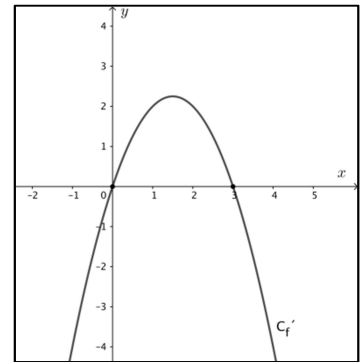
γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

37. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f , όπου f' είναι ένα πολώνυμο δευτέρου βαθμού.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.

γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(3, 2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f .



38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για $\lambda = -1$:

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$.