

1. ΘΕΜΑ_2_24768

Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}$.

2. ΘΕΜΑ_2_28477

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = e^{3x+2}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$.

γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4$, $x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta\mu^2 x - 4}{x}$.

3. ΘΕΜΑ_2_23217

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x - 1)$ και $g(x) = \frac{1}{x - 1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

β) Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$

ii. το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$

4. ΘΕΜΑ_2_23641

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

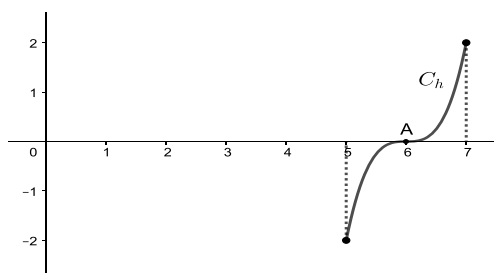
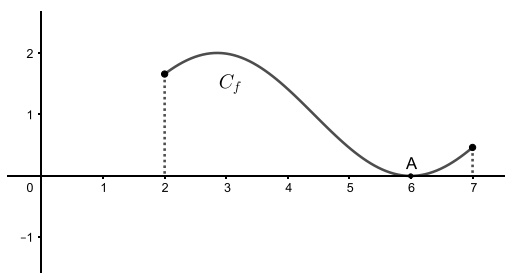
α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$.

β) Αν ισχύει ότι $\alpha^2 < \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)]x \right) = -\infty$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(0)$.

1. ΘΕΜΑ_2_36839

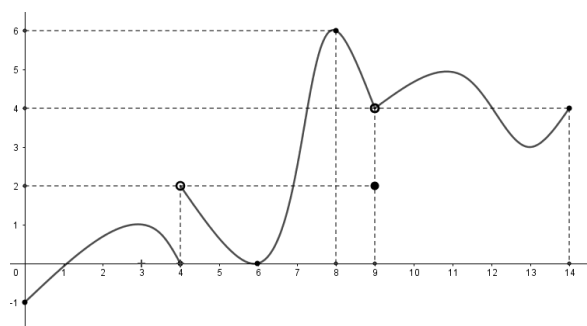
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 συνεχών συναρτήσεων των f και h , οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h .
- β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:
 - i. ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού τους,
 - ii. παίρνουν την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους.

2. ΘΕΜΑ_2_27318

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
- β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 14} f(x)$ v. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. ΘΕΜΑ_2_29834

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9x^2 + 16} - \frac{5}{2} \ln(8x + 1)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

4. ΘΕΜΑ_2_31548

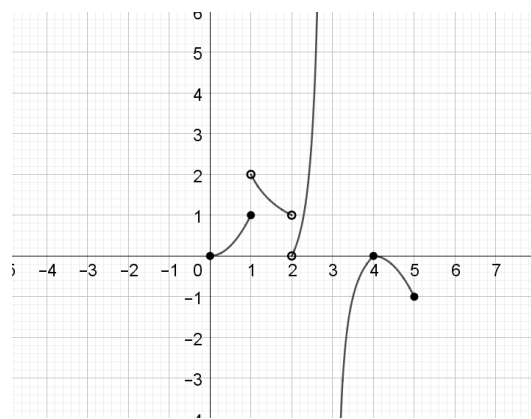
Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

- α)** $f(1) = 2$, **β)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, **γ)** η f είναι συνεχής στο 1.

5. ΘΕΜΑ_2_25749

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0,2) \cup (2,3) \cup (3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα x ' x σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες $(0,0)$ και $(4,0)$.



Επίσης, δίνεται ότι $f(1) = 1$. Με βάση το σχήμα:

- α)** να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας,
β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας,
γ) να βρείτε τα όρια: **i.** $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, **ii.** $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$.

6. ΘΕΜΑ_2_34024

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε γραφική παράσταση:

- α)** Να βρείτε:
i. την μονοτονία της συνάρτησης f ,
ii. το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f .

7. ΘΕΜΑ_2_24767

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α)** Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

8. ΘΕΜΑ_2_28684

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x) \leq \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

γ) Να βρείτε το $f(0)$.

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

$$\left\langle \left| f(x) \cdot \frac{\epsilon\phi x}{x} \right| = -f(x) \cdot \frac{\epsilon\phi x}{x} \text{ κοντά στο } 0 \right\rangle$$

9. ΘΕΜΑ_2_29838

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = 1 - x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$, **ii.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$.

10. ΘΕΜΑ_2_26640

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} .

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.

11. ΘΕΜΑ_3_24761

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x} & , x \neq 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$.

12. ΘΕΜΑ_4_23106

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0, \pi]$,

με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε: $(g \circ f)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$, για κάθε $x \in [0, \pi]$.

α) **i.** Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|$.

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Να βρείτε την συνάρτηση f .

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου

ερωτήματος. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.