

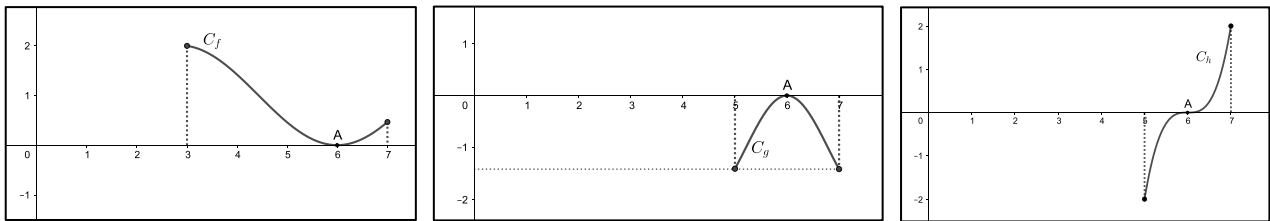
1. ΘΕΜΑ_2_36851

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 3x + 1 & , x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 1 & , x > 0 \end{cases}$.

- α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 .
- β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 .
- γ) Να δικαιολογήσετε γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1,1]$ και να βρείτε ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$.

2. ΘΕΜΑ_4_36842

Στα σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 3 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f , g και h οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f , g και h .
- β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:
 - i. ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους,
 - ii. υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της.

3. ΘΕΜΑ_2_31643

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$, $x \in [1,2]$.

- α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$.
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

4. ΘΕΜΑ_2_24283

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & , x \in [-1,2] \\ x - 1 & , x \in (2,5] \end{cases}$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.
- β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$.
- γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$.

5. ΘΕΜΑ_2_36827

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση g έχει αντίστροφη και να αποδείξετε ότι $g^{-1} = -f$.

β) Να αποδείξετε ότι $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

γ) Έστω $h(x) = (g \circ f)(x)$. Να βρείτε τον μοναδικό αριθμό ξ ο οποίος ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την συνάρτηση h στο διάστημα $[2, 8]$.

6. ΘΕΜΑ_4_29150

Η συνάρτηση $x(t) = (t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού A, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

α) i. Να βρείτε πότε το κινητό A είχε ταχύτητα μηδέν.

ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό A κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά.

β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διήνυσε το κινητό A.

γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού A, από τη χρονική στιγμή 1 sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του A ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το A στο διάστημα αυτό.