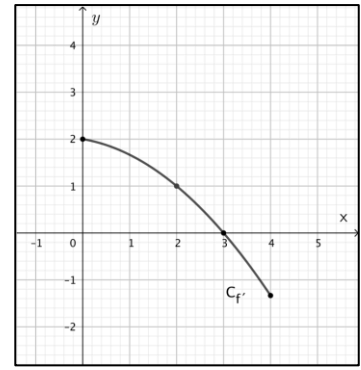


1. ΘΕΜΑ_2_26366

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$.



- α) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$;
 β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.
 γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.

2. ΘΕΜΑ_2_33633

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 3x + 2$, $x > 0$.

- α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.
 β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
 ii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) + 2023 = 0$ έχει θετική λύση.

3. ΘΕΜΑ_2_27082

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
 β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2, +\infty)$ είναι το διάστημα $[-5, +\infty)$.
 γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

4. ΘΕΜΑ_2_25124

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3$, $x \in (-\infty, 0]$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.
 γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

5. ΘΕΜΑ_2_23937

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο σημείο της $A(1, f(1))$.

6. ΘΕΜΑ_2_29211

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
 β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 γ) **i.** Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».
ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f , την f^{-1} .

7. ΘΕΜΑ_4_31793

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $g(x) = \ln(\ln x)$, $x > 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.
 β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $T(e, g(e))$. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη της (ε) .
 γ) Υποθέτουμε ότι $g(x) < f(x)$ για κάθε $x > 1$. Ένα σημείο $M(x, 0)$ κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 cm/s πάνω στον θετικό ημιάξονα, προς τα δεξιά. Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$, $\Gamma(x, g(x))$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $OB\Gamma$ τη χρονική στιγμή που το M βρίσκεται στη θέση $(e^2, 0)$.

8. ΘΕΜΑ_4_33388

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
 β) **i.** Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\frac{\pi}{2}, \pi + 1\right)$.
ii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 1$ εφάπτεται της C_f σε άπειρα σημεία.
 γ) Να δείξετε ότι:
i. $|f'(x)| \leq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
ii. $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq 3|\beta - \alpha|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

9. ΘΕΜΑ_4_29927

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

- α) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 β) **i.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^a$ (1) με $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = a$ και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a .

10. ΘΕΜΑ_4_27455

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 2 \\ e^{x-2} - 2 & , x \geq 2 \end{cases} \text{ και } g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x \neq 2$.

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

11. ΘΕΜΑ_4_27319

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-2)e^x + (x-1)\ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα $(1, 2)$.

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον $x'x$ στο σημείο x_0 του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία.

12. ΘΕΜΑ_4_26605

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x) - 5 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι: i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - \sin x$, με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 + \sin x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

13. ΘΕΜΑ_4_32524

Έστω η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{e}{x} - \ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x) = x \ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 1$.

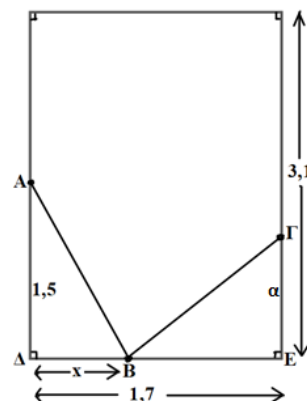
γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x}{e - x \ln x - ex}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

14. ΘΕΜΑ_4_31680

Ένα γαλλικό μπυλιάρδο έχει μήκος 3,1 μέτρα και πλάτος 1,7 μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο Α, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Β και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνονται τα μήκη $\Delta B = x$, $\Delta E = 1,7$, $\Delta A = 1,5$, $\Gamma E = \alpha$ και $L = AB + B\Gamma$ που εκφράζονται σε μέτρα.



α) Να αποδείξετε ότι $L = L(x) = \sqrt{x^2 + 2,25} + \sqrt{(1,7 - x)^2 + \alpha^2}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$.

β) Δίνεται ακόμη ότι το L γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το Β απέχει 1,02 μέτρα από το Δ.

i. Αν $L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2,25}} - \frac{(1,7 - x)}{\sqrt{(1,7 - x)^2 + \alpha^2}}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

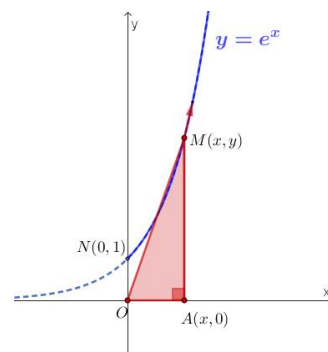
ii. Αν $L''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1,02} \frac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει.

15. ΘΕΜΑ_4_28685

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, $x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$.

β) Ένα κινητό Μ ξεκινά από το σημείο $N(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$, $x \geq 0$, έτσι, ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου OAM , όπου $O(0,0)$,



$A(x,0)$ και $M(x,y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x$, $x \geq 0$.

- ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E είναι $3e^2 \text{ cm}^2/\text{s}$.

16. ΘΕΜΑ_4_23376

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$. Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

β) Να αποδείξετε ότι: i. η συνάρτηση h είναι περιττή, ii. η συνάρτηση h είναι «1-1».

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1) + h\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$, $x > 0$.

17. ΘΕΜΑ_4_23200

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της.

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται.

18. ΘΕΜΑ_4_23375

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το \mathbb{R} .

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x + f(x)) > x$, $x \in \mathbb{R}$.

19. ΘΕΜΑ_4_23199

Έστω $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x > 1$ να ισχύει

$$xf(x)f'(x) = \frac{1}{2} \text{ και } f(e) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - \ln x$, $x > 1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f .

Έστω $f(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e, 0)$ και $B(e, 1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B .

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\frac{1}{x+1} < f^2(x+1) - f^2(x) < \frac{1}{x}$.