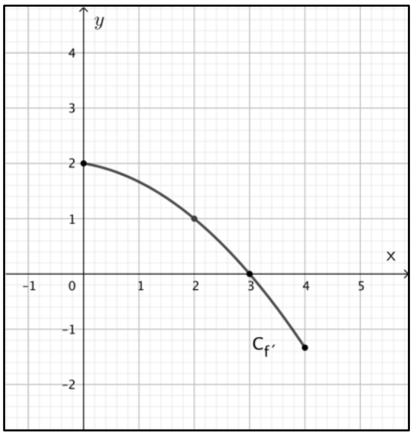
## 2.6 Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής – Μονοτονία συνάρτησης

**1.** Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου $f'$ μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f$ τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$.

**α)** Ποια είναι η κλίση της $f$ στο $x_0 = 2$;

**β)** Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

**γ)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.




**2.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 3x + 2$, $x > 0$.

**α)** Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

**β)** **i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

**ii.** Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) + 2023 = 0$ έχει θετική λύση.

**3.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

**α)** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της $f$.

**β)** Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της $f$ στο διάστημα $[2,+\infty)$ είναι το διάστημα $[-5,+\infty)$.

**γ)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2,+\infty)$.

**4.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3$, $x \in (-\infty,0]$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

**β)** Να αποδείξετε ότι η $f$ αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

**γ)** Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}$.

**5.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα.

**β)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$.

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$, στο σημείο της $A(1, f(1))$.

**6.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, $x < 0$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

**β)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$.

**γ)** **i.** Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι «1 – 1».

**ii.** Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f$, την $f^{-1}$.

**7.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$, $x>0$ και $g(x)=\ln(\ln x)$, $x>1$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η $f$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

**β)** Έστω $(\varepsilon)$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $g$ στο σημείο $T(e,g(e))$. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της $f$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη της $(\varepsilon)$.

**γ)** Υποθέτουμε ότι $g(x)<f(x)$ για κάθε $x>1$. Ένα σημείο $M(x,0)$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $2\ \mathrm{cm/s}$ πάνω στον θετικό ημιάξονα, προς τα δεξιά. Θεωρούμε τα σημεία $B(x,f(x))$, $\Gamma(x,g(x))$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $OB\Gamma$ τη χρονική στιγμή που το $M$ βρίσκεται στη θέση $(e^2,0)$.

**8.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ αντιστρέφεται.

**β)** **i.** Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο της $A\left(\dfrac{\pi}{2},\pi+1\right)$.

**ii.** Να δείξετε ότι η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται της $C_f$ σε άπειρα σημεία.

**γ)** Να δείξετε ότι:

**i.** $|f'(x)|\le 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**ii.** $|f(\beta)-f(\alpha)|\le 3|\beta-\alpha|$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

**9.** Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

**α)** Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

**β)** **i.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

**γ)** Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^\alpha \ (1)$ με $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = \alpha$ και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

**10.** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ με } f(x)=\begin{cases} -1 & , \ x<2 \\ e^{x-2}-2 & , \ x\ge 2\end{cases} \text{ και } g:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R} \text{ με } g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-3$$

**α)** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

**i.** τη συνάρτηση $f$ και να αποδείξετε ότι $f(x) \ge -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**ii.** τη συνάρτηση $g$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**β)** Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της $f$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της $g$ για κάθε $x \ne 2$.

**γ)** Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο $x_0$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**11.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με $f(x) = (x-2)e^x + (x-1)\ln x$, $x \in (0,+\infty)$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0$ στο διάστημα $(1,2)$.

**β)** Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $f'$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της $f$ στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια

**γ)** Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της $f$ και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $x_0$ του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η $C_f$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία.

**12.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x) - 5 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 3$.

**α)** Να αποδείξετε ότι : **i.** $f(x) \ne 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, **ii.** $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**β)** Δίνεται η συνάρτηση $g$ με $g(x) = x^2 - \text{συν}x$, με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

**i.** Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

**ii.** Η εξίσωση $f^2(x)=5+\text{συν}x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.

**13.** Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\frac{e}{x}-\ln x$.

**α)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g$ ως προς τη μονοτονία.

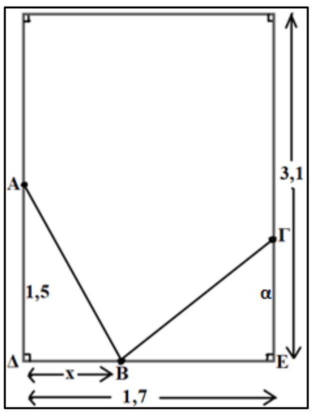
**β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x)=x\ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=1$.

**γ)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+x}{e-x\ln x-ex}$.

**i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$.

**ii.** Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$.

**14.** Ένα γαλλικό μπιλιάρδο έχει μήκος $3{,}1$ μέτρα και πλάτος $1{,}7$ μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο Α, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Β και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνονται τα μήκη $\text{ΔΒ}=x$, $\text{ΔΕ}=1{,}7$, $\text{ΑΔ}=1{,}5$, $\text{ΓΕ}=\alpha$ και $L=\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}$ που εκφράζονται σε μέτρα.




**α)** Να αποδείξετε ότι $L=L(x)=\sqrt{x^2+2{,}25}+\sqrt{(1{,}7-x)^2+\alpha^2}$, $x\in\left(0,\frac{17}{10}\right)$.

**β)** Δίνεται ακόμη ότι το $L$ γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το Β απέχει $1{,}02$ μέτρα από το Δ.

**i.** Αν $L'(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+2{,}25}}-\sqrt{\dfrac{(1{,}7-x)^2}{(1{,}7-x)^2+\alpha^2}}$, $x\in\left(0,\frac{17}{10}\right)$ να δείξετε ότι $\alpha=1$.

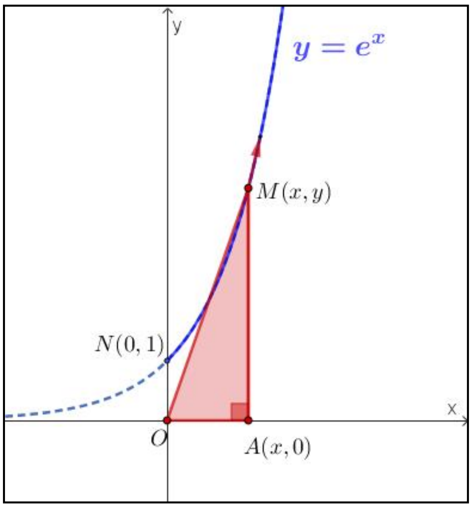
**ii.** Αν $L''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1{,}02}\dfrac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει.

**15.** **α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x+xe^x=3e^2$, $x\in(0,+\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x=2$.

**β)** Ένα κινητό Μ ξεκινά από το σημείο $N(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=e^x$, $x\geq 0$, έτσι, ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s.

**i.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E$ του τριγώνου ΟΑΜ, όπου $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $M(x,y)$ είναι $E(x)=\frac{1}{2}xe^x$, $x\geq 0$.

**ii.** Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή $t_0$, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E$ είναι $3e^2\ \text{cm}^2/\text{s}$.




**16.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$. Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της $f$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

**α)** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ f$.

**β)** Να αποδείξετε ότι: **i.** η συνάρτηση $h$ είναι περιττή, **ii.** η συνάρτηση $h$ είναι «1 – 1».

**γ)** Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1)+h\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$, $x>0$.

**17.** Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1,\ln 2)$.

**α)** Να βρείτε τη μονοτονία της.

**β)** Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha\ln\alpha)\leq f(\ln\alpha)$.

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^{x-1}+\ln x\right)=\ln 2$.

**δ)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+(3-\ln 2)x-3$, $x\in\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση $g$ δεν αντιστρέφεται.

**18.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

**α)** Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

**β)** Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση $f$ αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$.

**γ)** Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(x+f(x)\right)>x$, $x\in\mathbb{R}$.

**19.** Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$ να ισχύει

$$xf(x)f'(x)=\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad f(e)=1.$$

**α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x$, $x>1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f.

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x}$, $x>1$.

**β)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,0)$ και $B(e,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B.

**γ)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}$.