

1. ΘΕΜΑ_2_33995

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2+1}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
 β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της $(\varepsilon): y = x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
 γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι «1-1».

2. ΘΕΜΑ_2_35602

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-1}$, $x \neq 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .
 β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\zeta): x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .
 γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

3. ΘΕΜΑ_2_27084

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

- α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .
 β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
 γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

4. ΘΕΜΑ_2_34439

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$ και $g(x) = \frac{1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) i. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$.
 ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$.

Αν $h(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ τότε:

- β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι «1-1»,
 γ) να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

5. ΘΕΜΑ_2_31547

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x \neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 2$.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι **i.** συνεχής στο 2 , **ii.** παραγωγίσιμη στο 2 .

6. ΘΕΜΑ_2_25748

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R} της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

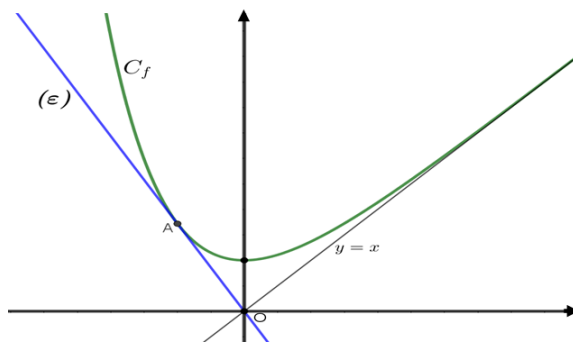
α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2}$

7. ΘΕΜΑ_2_23530

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο \mathbb{R} συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:



1) στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε) , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2) η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.

α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) .

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)}$.

8. ΘΕΜΑ_4_31746

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(0, f(0))$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq 2x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. ΘΕΜΑ_4_28342

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει τις κορυφές A και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές

Β και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x, x < 1$ και $g(x) = \frac{e}{x}, x > 1$,

αντίστοιχα. Έστω $A(a, 0)$ με $a < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

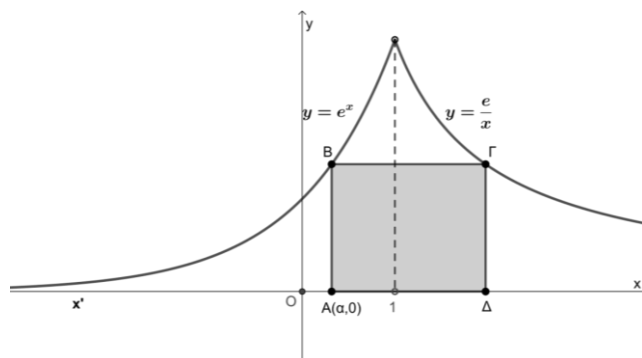
i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_{\Delta} = e^{1-a}$,

ii. το εμβαδόν του ορθογώνιου ABΓΔ είναι $E(a) = e - ae^a, a < 1$.

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογώνιου ABΓΔ.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές

του a , για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογώνιου ABΓΔ γίνεται ίσο με 1.



10. ΘΕΜΑ_4_28314

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\lambda x + 1}}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$.

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f .

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

11. ΘΕΜΑ_4_29130

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

ii. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y = x$ τα οποία και να προσδιορίσετε.

β) Για τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii. Στο διάστημα $(0, +\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y = x$.

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0, +\infty)$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f .

12. ΘΕΜΑ_4_24759

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x) \geq x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν επιπλέον $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, ii. η f δεν είναι κοίλη.

13. ΘΕΜΑ_4_24579

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2 \ln x - x$.

α) i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

14. ΘΕΜΑ_4_26631

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς ασύμπτωτες.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\frac{x^2+3}{2x^2+1}\right) = 2 - x^2$.

15. ΘΕΜΑ_4_33999

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

β) Αν επιπλέον ισχύει $(x+1)f'(x) \cdot \ln(x+1) = -f(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \ln(x+1)$, $x > 0$ είναι σταθερή.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $\frac{\ln(x+1)}{x} \leq g(x) \leq \ln(x+1) + \frac{\ln(x+1)}{x}$ και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f .