

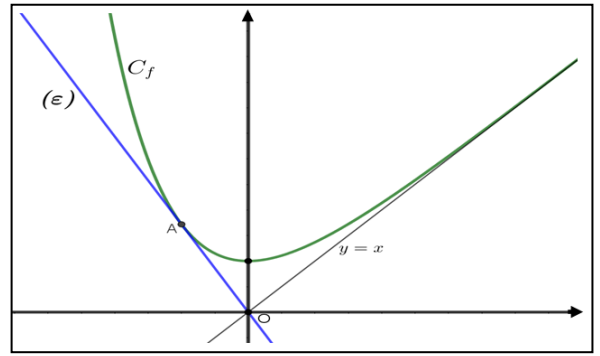
## 2.9 Ασύμπτωτες – Κανόνας De L' Hospital

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2+1}$ .
- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon: y = x$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .
- β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της  $\varepsilon: y = x$  με την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .
- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι «1-1».
2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-1}$ ,  $x \neq 1$ .
- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon): y = x - 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ .
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $(\zeta): x = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ .
- γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία.
3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της  $f$ .
- β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή.
- γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = x$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ .
4. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $x \neq 1$  και  $g(x) = \frac{1}{e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- α) **i.** Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $h(x) = (f \circ g)(x)$ .
- ii.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $h(x) = (f \circ g)(x)$ .
- Αν  $h(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  τότε:
- β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι «1-1»,
- γ) να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .
5. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $f(x) = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$  για κάθε  $x \neq 2$ .
- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη  $x = 2$ .
- β) Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι **i.** συνεχής στο 2, **ii.** παραγωγίσιμη στο 2.
6. Έστω  $f$  συνάρτηση ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία  $(\varepsilon): y = 3x - 2$  πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ . Να βρείτε τα παρακάτω όρια:
- α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$ ,      β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,      γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2}$ .
7. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο  $\mathbb{R}$  συνάρτησης  $f(x)$  για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

1) στο σημείο  $A(-1, f(-1))$  της γραφικής παράστασης της  $f$  έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία  $(\varepsilon)$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2) η ευθεία  $y = x$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f(x)$  στο  $+\infty$ .

α) Αν γνωρίζουμε ότι  $f(-1) = e - 1$ , να αποδείξετε ότι το  $f'(-1) = 1 - e$  και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $(\varepsilon)$ .



β) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ .

γ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)}$ .

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

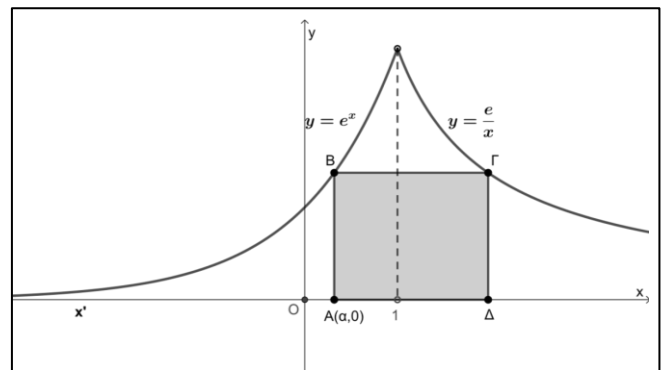
α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $M(0, f(0))$ .

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

δ) Να αποδείξετε ότι:  $f(x) \geq 2x + 6$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

9. Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  έχει τις κορυφές  $A$  και  $\Delta$  πάνω στον άξονα  $x'x$  και τις κορυφές  $B$  και  $\Gamma$  πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = e^x$ ,  $x < 1$  και  $g(x) = \frac{e}{x}$ ,  $x > 1$ , αντίστοιχα. Έστω  $A(\alpha, 0)$  με  $\alpha < 1$ .



α) Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής  $\Delta$  είναι  $x_\Delta = e^{1-\alpha}$ ,

ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $E(\alpha) = e - \alpha e^\alpha$ ,  $\alpha < 1$ .

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ .

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του  $\alpha$ , για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  γίνεται ίσο με 1.

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} e^{\lambda x + 1} & , x > 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\lambda = -1$ .

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της  $f$ .

γ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x \ln x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία  $y = x$  εφάπτεται της  $C_f$  στο σημείο  $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ .

ii. Η  $C_f$  έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της  $y = x$  τα οποία και να προσδιορίσετε.

β) Για τη συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $g(x) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

i. Η  $y = x$  είναι ασύμπτωτη της  $C_g$  στο  $+\infty$ .

ii. Στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , η  $C_g$  βρίσκεται πάνω από την  $y = x$ .

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της  $f$ .

12. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει  $f(x) \geq x^2 - x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α) i. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq \frac{3}{4}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β) Αν επιπλέον  $f(1) = 1$  και  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$  να αποδείξετε ότι:

i.  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ,                      ii. η  $f$  δεν είναι κοίλη.

13. Δίνεται συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο  $f(x) = 2 \ln x - x$ .

α) i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

14. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x - x$ ,  $x > 0$ .

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς ασύμπτωτες.

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $\ln\left(\frac{x^2 + 3}{2x^2 + 1}\right) = 2 - x^2$ .