

1. ΘΕΜΑ_4_32225

Για μια συνεχή συνάρτηση $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$(f(x) + x)^2 = x^2(x + 1), \text{ για κάθε } x \in [-1, +\infty) \text{ και } f\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}.$$

α) Αν $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-1, +\infty)$ τότε

i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x(\sqrt{x+1} - 1)$, $x \geq -1$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in (-1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι

$$\int_{2023}^{2024} (f(x+1) - f(x)) dx < \int_{2023}^{2024} (f(x+2) - f(x+1)) dx.$$

2. ΘΕΜΑ_4_31551

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ και $\varphi(x) = x \sin x - \eta\mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in (-\pi, \pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa} \varphi(x) dx = 0$.

3. ΘΕΜΑ_4_24771

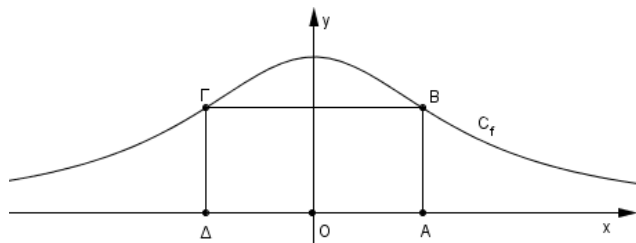
Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και $(x^2 + 1)f'(x) + \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να

βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B , Γ , Δ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με τη βοήθεια της τετμημένης α , $\alpha > 0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$.



γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από τον τύπο $E(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$, $\alpha > 0$.

Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του a το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = \ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x) dx = \ln \sqrt{2}$.

4. ΘΕΜΑ_4_24770

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_0 = \ln 2$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx$.

5. ΘΕΜΑ_4_23219

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι: i. $\int_0^1 f(x) dx > 1$ ii. $\int_0^1 xf'(x) dx < 1$