3.4 Ορισμένο ολοκλήρωμα

1. Για μια συνεχή συνάρτηση $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\left(f(x)+x\right)^2 = x^2(x+1),\ \text{για κάθε } x\in[-1,+\infty) \quad \text{και} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}.$$

α) Αν $g(x)=f(x)+x$, $x\in[-1,+\infty)$ τότε

i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x)=0$.

ii. Να αποδείξετε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right)$, $x\geq -1$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x)=f(x+1)-f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι

$$\int_{2023}^{2024}\left(f(x+1)-f(x)\right)dx<\int_{2023}^{2024}\left(f(x+2)-f(x+1)\right)dx.$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]\\ 1, & x=0\end{cases}$ και $\varphi(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in[-\pi,\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο . και να βρείτε το πρόσημό της.

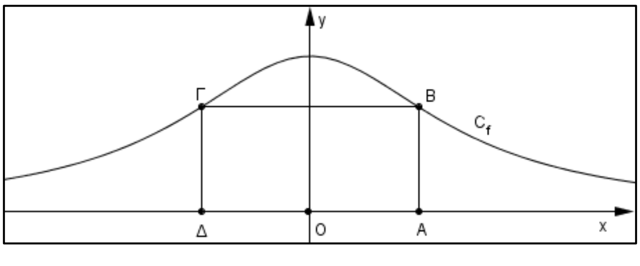
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in(-\pi,\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa}\varphi(x)dx=0$.

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $(x^2+1)f'(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.



β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης α, $\alpha>0$ του σημείου $A(\alpha,0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο $E(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$, $\alpha>0$.

Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1)=\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x)dx=\ln\sqrt{2}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)+x-1,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

β) **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_0=\ln 2$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln\left(e^x-1\right)\le 2x-\ln 4$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}dx$.

5. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1)=f'(1)=2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1,f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι : **i.** $\int_0^1 f(x)dx>1$, **ii.** $\int_0^1 xf'(x)dx<1$.