

1. ΘΕΜΑ_2_33593

Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο \mathbb{R} με $\int_2^3 f(x) dx = 2$, $\int_1^3 f(x) dx = 4$ και $\int_1^7 f(x) dx = 10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_3^2 f(x) dx$

β) $\int_3^7 f(x) dx$

γ) $\int_7^2 f(x) dx$

δ) $\int_1^3 (f(x) - x) dx$

2. ΘΕΜΑ_4_33998

Το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου βενζίνης αφήνεται ανοιχτό τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η βενζίνη που απομένει μέσα στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου t (σε εβδομάδες) δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $g(t)$ (σε λίτρα).

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln \frac{4}{5} dt$.

β) Αν η βενζίνη του δοχείου έχει ρυθμό εξάτμισης που δίνεται από τον τύπο $g'(t) = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln \frac{4}{5}$, για κάθε $t > 0$, τότε να βρείτε τον όγκο της βενζίνης που περιέχει το δοχείο δυο εβδομάδες μετά το άνοιγμα του καπακιού του δοχείου.

γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες είναι η $g(t) = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$, $t \in [0, +\infty)$ τότε να διαπιστώσετε ότι καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.

3. ΘΕΜΑ_4_35245

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $0 < f(\alpha+1) - f(\alpha) < 1$.

4. ΘΕΜΑ_4_34565

Θεωρούμε τους αριθμούς α, β με $1 < \alpha < \beta$ και την παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f , με συνεχή παράγωγο,

ώστε $f(x) > 0$, για κάθε $[\alpha, \beta]$. Ας είναι λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) + \lambda\alpha - f(\alpha)}{x}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ ώστε $cf'(c) - f(c) - \lambda\alpha + f(\alpha) = 0$.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $f'(c) \neq \lambda$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(c, f(c))$ και η ευθεία AB τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

δ) Αν είναι $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^2$, να αποδείξετε ότι το παρακάτω ολοκλήρωμα $I = \int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}} \frac{xf'(x^2+1)}{f(x^2+1)} dx$ είναι ίσο με -1 .

5. ΘΕΜΑ_4_36816

Θεωρούμε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει ότι

$$xf(x) = \eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

δ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{2}}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \leq \frac{1}{4}$.

6. ΘΕΜΑ_4_33578

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $e^x + \eta\mu x \geq 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = x - \ln(e^x + \eta\mu x)$, $x \in [0, \pi]$, είναι μια αρχική (παράγουσα) της

$$\text{συνάρτησης } f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x + \eta\mu x}, \quad x \in [0, \pi].$$

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi xf'(x) dx = \frac{\pi}{e^\pi}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{1}{(e^x + \eta\mu x)x} dx < 1$.

7. ΘΕΜΑ_4_29837

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 1, & x < 1 \\ x^2 + 3x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η συνάρτηση $f'(x)$ όπου ορίζεται.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 1$.

γ) Ένας μαθητής διατύπωσε την άποψη ότι «το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της (ε) και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$ είναι $E = \int_0^2 (f(x) - (5x - 2)) dx$ ». Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και επιπλέον να υπολογίσετε το εν λόγω εμβαδόν.

8. ΘΕΜΑ_4_29837

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$, με $x \neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστροφής.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f \circ f$ και f^{-1} είναι ίσες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν $\varphi(x) = (f \circ f)(x) = \frac{x-1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \varphi(x) dx$.

9. ΘΕΜΑ_4_27321

Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς. Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση

$$y = f(x) = \alpha x e^{-\beta x}, \quad x \in (0, +\infty) \quad \text{όπου } \alpha, \beta \text{ θετικές σταθερές, με } \beta \in (0, 1) \text{ και } \alpha \in (1, +\infty)$$

α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y ;

β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά.

γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f . Να αποδείξετε ότι:

$$F(\beta) - F(2\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2\beta^2 + 1 - (1 + \beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$$

10. ΘΕΜΑ_4_29549

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε:

$$f'(0) = f(0) = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^\pi f''(x) \eta \mu x dx = -\int_0^\pi f'(x) \sigma \nu \eta x dx$.

β) $f(\pi) = 0$.

γ) Στο διάστημα $(0, \pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής.

11. ΘΕΜΑ_4_27668

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)(x-\lambda)(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$ με $1 < \lambda < 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο \mathbb{R} .

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x) = -f(4-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x) dx$.

12. ΘΕΜΑ_4_27322

Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση $T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt}$ όπου:

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

β) Να αποδείξετε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$.

γ) Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot \ln(T(t)) dt$ είναι ίσο με $\frac{2e^3 - 3e^4}{k}$ αν είναι $T(0) = e^4$

και $T(1) = e^3$.

13. ΘΕΜΑ_4_26184

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

α) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x = e^2$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e^2} f(x) dx$.

14. ΘΕΜΑ_4_25766

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 1$ και $f(2) = 5$, τότε:

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = |x^2 - 4| + 5$.
- δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 xf(x) dx = 0$.

15. ΘΕΜΑ_4_24758

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ και για $x = -1$ και στη συνέχεια ότι $f(1) = f(-1) = 0$.
- β) $f'(1) \geq 0$ και $f'(-1) \leq 0$.
- γ) η f δεν είναι κοίλη.
- δ) $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x) dx \leq 0$.

16. ΘΕΜΑ_4_23957

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} f(x)$.
- β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1.
- γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2 \ln xf(x) + xe^x}{x(f(x) + e^x)} dx$.