3.5 Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού

1. Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 4$ και $\int_1^7 f(x)dx = 10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_3^2 f(x)dx$ **β)** $\int_3^7 f(x)dx$ **γ)** $\int_7^2 f(x)dx$ **δ)** $\int_1^3 (f(x)-x)dx$

2. Το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου βενζίνης αφήνεται ανοιχτό τη χρονική στιγμή $t=0$. Η βενζίνη που απομένει μέσα στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου t (σε εβδομάδες) δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $g(t)$ (σε λίτρα).

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t\cdot\ln\frac{4}{5}dt$.

β) Αν η βενζίνη του δοχείου έχει ρυθμό εξάτμισης που δίνεται από τον τύπο $g'(t)=5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t\cdot\ln\frac{4}{5}$, για κάθε $t>0$, τότε να βρείτε τον όγκο της βενζίνης που περιέχει το δοχείο δυο εβδομάδες μετά το άνοιγμα του καπακιού του δοχείου.

γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες είναι η $g(t)=5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t$, $t\in[0,+\infty)$ τότε να διαπιστώσετε ότι καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.

3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x)\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει: $0<f(\alpha+1)-f(\alpha)<1$.

4. Θεωρούμε τους αριθμούς α, β με $1<\alpha<\beta$ και την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, με συνεχή παράγωγο, ώστε $f(x)>0$, για κάθε $[\alpha,\beta]$. Ας είναι λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$, με $f(\alpha)\ne f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)+\lambda\alpha-f(\alpha)}{x}$ ικανοποιεί τις πρoϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ ώστε $cf'(c)-f(c)-\lambda\alpha+f(\alpha)=0$.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $f'(c)\ne\lambda$, να αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(c,f(c))$ και η ευθεία AB τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

δ) Αν είναι $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^2$, να αποδείξτε ότι το παρακάτω ολοκλήρωμα $I = \int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}} \frac{xf'(x^2+1)}{f(x^2+1)}dx$ είναι ίσο με -1.

5. Θεωρούμε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει ότι

$$xf(x) = ημx \quad \text{για κάθε} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

δ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{2}}{6} \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx \le \frac{1}{4}$.

6. **α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $e^x + ημx \ge 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = x - \ln(e^x + ημx)$, $x \in [0, \pi]$, είναι μια αρχική (παράγουσα) της συνάρτησης $f(x) = \frac{ημx - συνx}{e^x + ημx}$, $x \in [0, \pi]$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi xf'(x)dx = \frac{\pi}{e^\pi}$.

δ) Να αποδείξτε ότι $\int_1^e \frac{1}{(e^x + ημx)x}dx < 1$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 1, & x < 1 \\ x^2 + 3x - 1, & x \ge 1 \end{cases}$.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση $f'(x)$ όπου ορίζεται.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 1$.

γ) Ένας μαθητής διατύπωσε την άποψη ότι «το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της (ε) και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$ είναι $E = \int_0^2 (f(x) - (5x - 2))dx$ ». Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και επιπλέον να υπολογίσετε το εν λόγω εμβαδόν.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$, με $x \ne 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστρόφου.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f \circ f$ και f^{-1} είναι ίσες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν $\varphi(x)=(f\circ f)(x)=\dfrac{x-1}{x}$ με $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \varphi(x)dx$.

9. Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς. Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y=f(x)=\alpha x e^{-\beta x}$, $x\in(0,+\infty)$ όπου α, β θετικές σταθερές, με $\beta\in(0,1)$ και $\alpha\in(1,+\infty)$.

α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y;

β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά.

γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f. Να αποδείξτε ότι $F(\beta)-F(2\beta)=\dfrac{\alpha}{\beta^2}\cdot\dfrac{2\beta^2+1-\left(1+\beta^2\right)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$.

10. Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε:

$$f'(0)=f(0)=0 \text{ και } \int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx=0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x\,dx=-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

β) $f(\pi)=0$.

γ) Στο διάστημα $(0,\pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-3)(x-\lambda)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ με $1<\lambda<3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x)=-f(4-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)dx$.

12. Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση $T(t)=E+\left(T_0-E\right)e^{-kt}$ όπου:

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E<T_0$.
- $T_0=T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίστε το $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

β) Να αποδείξτε ότι $T'(t)=k\left[E-T(t)\right]$.

γ) Να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 \left(E-T(t)\right)\cdot \ln\left(T(t)\right)dt$ είναι ίσο με $\dfrac{2e^3-3e^4}{k}$ αν είναι $T(0)=e^4$ και $T(1)=e^3$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x>0$.

α) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x=e^2$.

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^{e^2} f(x)dx$.

14. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $f(0)=1$ και $f(2)=5$, τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\left|x^2-4\right|+5$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$.

15. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x)=\left(x^2-1\right)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1)=f(-1)=0$.

β) $f'(1)\ge 0$ και $f'(-1)\le 0$.

γ) η f δεν είναι κοίλη.

δ) $\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x\right)f'(x)dx\le 0$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\ln^2 x}$, $x>0$.

α) Να αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}f(x)$.

β) Να αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1.

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^{e}\dfrac{2\ln x f(x)+xe^x}{x\left(f(x)+e^x\right)}dx$.