

1. ΘΕΜΑ_2_36838

Δίνονται οι συνεχείς στο \mathbb{R} συναρτήσεις f και g .

$$\text{Αν } \int_1^3 f(x)dx = 6, \int_1^8 f(x)dx = 29, \int_3^5 f(x)dx = 8, \int_1^5 g(x)dx = -6, \text{ τότε:}$$

α) Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i. } \int_3^8 f(x)dx \quad \text{ii. } \int_5^8 2f(x)dx \quad \text{iii. } \int_1^5 (f(x)+g(x))dx$$

β) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1,5]$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=5$.

2. ΘΕΜΑ_2_36849

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ 1 - \sin x & , x > 0 \end{cases}$$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=-2$ και $x=\pi$.

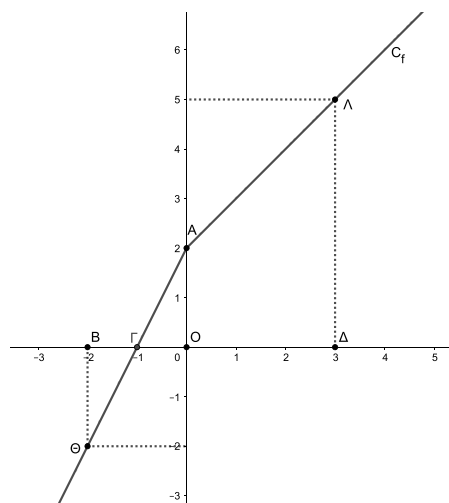
3. ΘΕΜΑ_2_36837

Στο σχήμα η τεθλασμένη γραμμή $\Theta\Lambda\Gamma$ αποτελεί γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο \mathbb{R} , που διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\Gamma(-1,0)$.

α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i. } \int_{-2}^{-1} f(x)dx \quad \text{ii. } \int_{-1}^0 f(x)dx \quad \text{iii. } \int_0^3 f(x)dx$$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=-2$ και $x=3$.

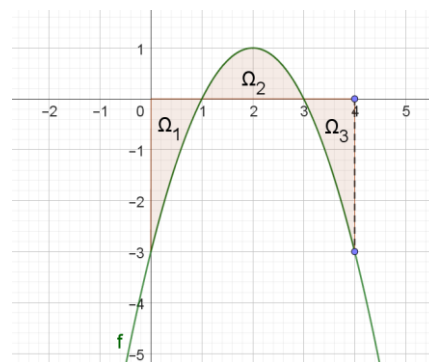


4. ΘΕΜΑ_2_33588

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = E(\Omega_3) = \frac{4}{3}$$

α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:



i. $\int_0^1 f(x)dx$

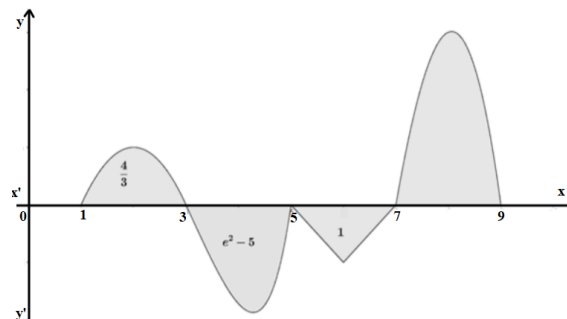
ii. $\int_0^3 f(x)dx$

iii. $\int_0^4 f(x)dx$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\int_0^{2023} f(x)dx - \int_4^{2023} f(x)dx$.

5. ΘΕΜΑ_2_32800

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1,9] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1,7]$.



Δίνεται ακόμη ότι $\left(\int_7^9 f(x)dx\right)^2 = 16$ και ότι η γραφική

παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες 1, 3, 5, 7.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_7^9 f(x)dx = 4$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1,9]$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x)dx$.

6. ΘΕΜΑ_4_34566

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a,\beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $a > 0$ και $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [a,\beta]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[a,\beta]$, $\int_a^\beta xf(x)f'(x)dx = -\ln 2$, $\beta f^2(\beta) = a f^2(a)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = xf^2(x)$, $x \in [a,\beta]$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^2(x)$, τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$, είναι $\ln 4$ τετραγωνικές μονάδες.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a,\beta]$.

δ) Έστω ότι η συνάρτηση G είναι μια αρχική της f στο $[a,\beta]$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [a,\beta]$,

ισχύει $\frac{G(x) - G(a)}{x - a} < f(a)$.

7. ΘΕΜΑ_4_33634

Έστω $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx$ και $J = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $I + J = \frac{\pi^2}{4}$.

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u = \frac{\pi}{2} - x$ να αποδείξετε ότι $I = J$ και κατόπιν ότι $I = J = \frac{\pi^2}{8}$.

γ) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης

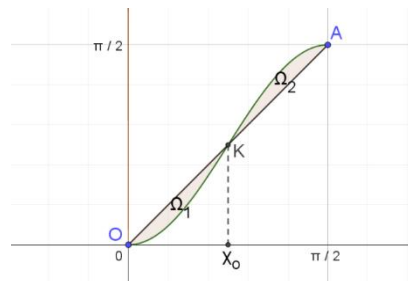
$f(x) = \frac{\pi}{2} \eta\mu^2 x$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η ευθεία OA τέμνει τη C_f

στα σημεία $O(0,0)$, $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $K(x_0, f(x_0))$ και ορίζει με τη C_f

τα χωρία Ω_1, Ω_2 . Να αποδείξετε ότι :

i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f , του άξονα yy' και της ευθείας $y = \frac{\pi}{2}$ είναι το J .

ii. τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 είναι ίσα .



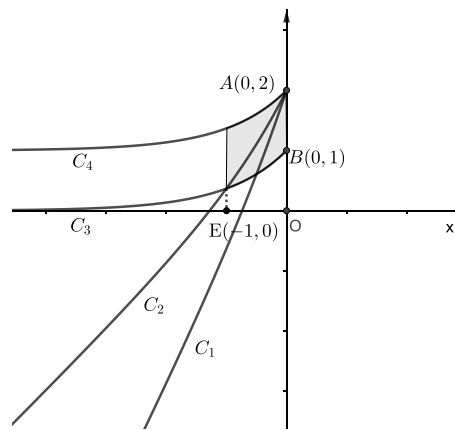
8. ΘΕΜΑ_4_35302

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g και h με $f(x) = e^x$, $g(x) = e^x + 1$, $h(x) = e^x + x + 1$, $x \in (-\infty, 0]$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

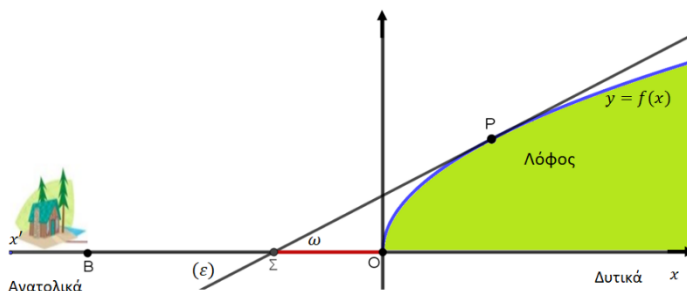
β) Στο διπλανό σχήμα δίνονται 4 γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι C_1, C_2, C_3, C_4 . Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία από τις συναρτήσεις f, g και h τη γραφική της παράσταση, επιλέγοντας μεταξύ των C_1, C_2, C_3, C_4 την κατάλληλη και να δικαιολογήσετε πλήρως την επιλογή σας.

γ) Να αποδείξετε ότι, η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 και C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1$ και $x = 0$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία.



9. ΘΕΜΑ_4_33577

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο απεικονίζεται μια αγροικία στην θέση B του αρνητικού ημιάξονα Ox' . Δυτικά της αγροικίας, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Ox , υπάρχει ένας λόφος, το ύψος του



οποίου δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ για $x \geq 0$. Όλες οι συντεταγμένες μετρούνται σε μέτρα.

Καθώς ο ήλιος αρχίζει να δύει, ο λόφος ρίχνει στην πεδιάδα την σκιά του ΟΣ, η οποία και μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου t , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θεωρούμε $t = 0$ τη στιγμή που ο ήλιος ρίχνει κάθετα τις ακτίνες του στο σημείο O του λόφου, ενώ στη συνέχεια κινούμενος προς τα δυτικά, αρχίζει να δημιουργείται η σκιά. Ας είναι $\hat{\omega} = \widehat{P\dot{S}O}$.

α) Αν το σημείο P έχει συντεταγμένες $P(x_P, y_P)$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου S είναι

$$x_S = -x_P.$$

β) Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{1}{2}(x_P(t))^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Να βρείτε πόσο γρήγορα μεγαλώνει η σκιά ΟΣ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία οι ακτίνες του ήλιου

σχηματίζουν γωνία $\omega = \frac{\pi}{6}$ με τον οριζόντιο άξονα, ενώ αυτή τη χρονική στιγμή t_0 η γωνία ω μειώνεται

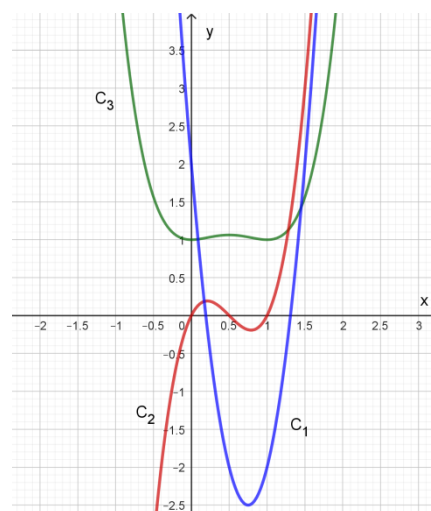
με ρυθμό $\frac{1}{16}$ rad ανά λεπτό. Δίνεται ότι $\frac{1}{\sin^2 \omega} = 1 + \varepsilon\varphi^2 \omega$.

10. ΘΕΜΑ_4_34151

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F , όπου F μία αρχική της f στο \mathbb{R} .

Δίνεται επίσης ότι η C_3 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1, ενώ η C_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακόμη σημεία με τετμημένες $\frac{1}{2}, 1$.

Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2 ,



α) να μελετήσετε με τη βοήθεια του σχήματος τη συνάρτηση F ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα,

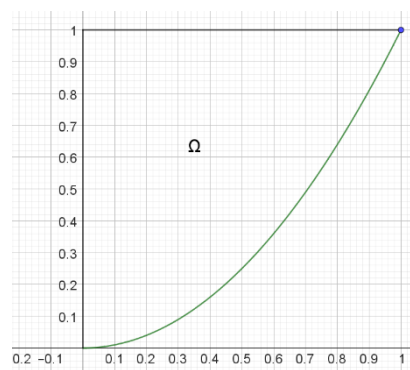
β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F ,

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F ,

δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

11. ΘΕΜΑ_4_33598

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[0,1]$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τον άξονα yy' την ευθεία $y = 1$ και τη γραφική παράσταση της f .



- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παραπάνω σχήμα και σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της f^{-1} .
- γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{2}$.
- δ) Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής αξιοποιώντας το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:
- i. $\int_0^1 f^{-1}(x) dx = 1 - \int_0^1 f(x) dx$, ii. $E(\Omega) = \int_0^1 f^{-1}(x) dx$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω .

12. ΘΕΜΑ_4_29645

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1 & , x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < 0$ και $x_2 > 3$.
- β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με x_1, x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος α). Να βρείτε όλα τα $\xi \in (x_1, x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.
- γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία ε και την ευθεία $x = 0$.

13. ΘΕΜΑ_4_29646

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0$

- α) Να αποδείξετε ότι:
- i. Η f παρουσιάζει στο $x_1 = 0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2 = 2$ μέγιστο και το σημείο $\Gamma(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f .
- ii. Τα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος AB .
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία.
- γ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της B , η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , της ευθείας ε και του άξονα $y'y$.

14. ΘΕΜΑ_4_31792

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1 & , -1 \leq x < 1 \\ 1 + \frac{\ln^2 x}{x} & , x \geq 1 \end{cases}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$.
- β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .
- γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$.

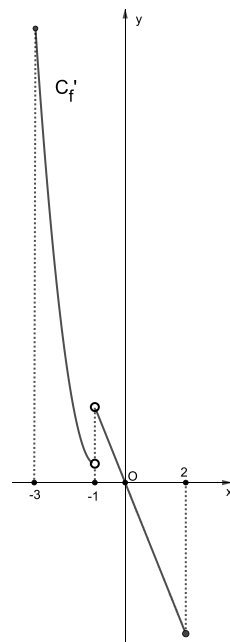
15. ΘΕΜΑ_4_25147

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0, 2\pi]$.
- β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των C_f , C_g .

16. ΘΕΜΑ_4_28870

Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[-3, 2]$, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1 . Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f , η $C_{f'}$, που στο διάστημα $(-1, 2]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα.



- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- β) Να βρείτε:
- i. τα κρίσιμα σημεία της f , αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας,
 - ii. τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους.
- γ) Αν η f' είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x) dx = -4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$.

17. ΘΕΜΑ_4_28476

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

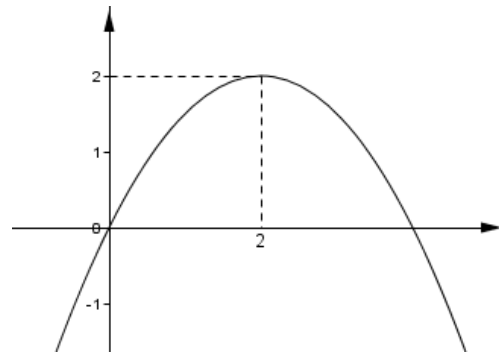
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x-1)}{\ln x} = 0 \text{ και } f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$, ii. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.
- γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E, που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=0$ και $x=1$.

18. ΘΕΜΑ_4_31534

Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο $K(2,2)$ και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$, να αποδείξετε ότι

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1.$$

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + x + 1 - \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x > 0$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x=0$ και $x=\pi$.

19. ΘΕΜΑ_4_31149

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(1+f(x)) - \ln(f(x)) > f^2(x) \cdot f(\ln 2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $\ln\left(\frac{27}{4e}\right)$.

20. ΘΕΜΑ_4_31148

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ, ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Z.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογώνιου ΒΓΖΔ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x , το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}, \text{ τον άξονα } x'x \text{ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις } x = \ln 2 \text{ και } x = 1, \text{ είναι}$$

$\ln \sqrt{2}e - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.

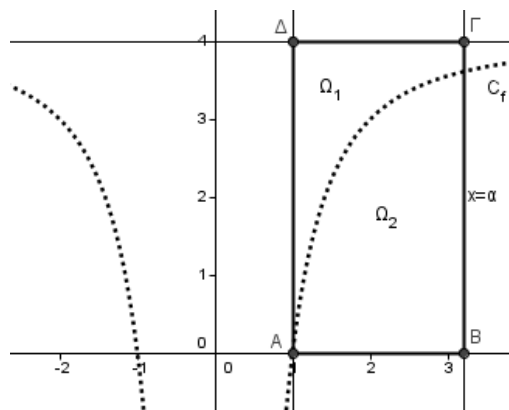
21. ΘΕΜΑ_4_31533

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f .

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = -4$.

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \alpha$, $\alpha > 1$ και $y = 4$. Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1, Ω_2 .



i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α , τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$.

22. ΘΕΜΑ_4_31530

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_0 που περιέχεται στο διάστημα $(0,1)$.

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_0 είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \theta)x^3 + 2x - 5}{f(x_0 - \theta)x - 5}$, αν x_0 είναι ο αριθμός του ερωτήματος α) και θ ένας θετικός αριθμός.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1,4)$ και την κατακόρυφη ευθεία $x = 2$.

23. ΘΕΜΑ_4_26183

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{4 \ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1.
- β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E = \frac{\ln 4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες.

24. ΘΕΜΑ_4_25746

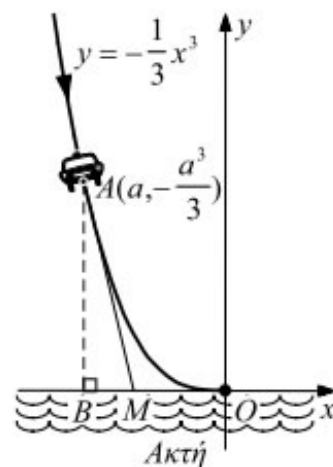
Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}f(x)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1)$.
- δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $E < f(1)$.

25. ΘΕΜΑ_4_27031

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$ με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(a, -\frac{a^3}{3}\right)$ με $a < 0$ της γραφικής της παράστασης.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A .
- β) i. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3, x \leq 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).
Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $a'(t) = -\alpha(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3 .



- ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου M .

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3 .

26. ΘΕΜΑ_4_25765

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + x, x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$.

γ) Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x) = e^{f(|x|)}$ για κάθε $x \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^2 e^{|x|}, x \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g , τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1, x = 1$.

27. ΘΕΜΑ_4_25747

Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και ισχύουν $f(1) = 1$ και $f(x) \cdot f'(x) = -x + 1$, για κάθε $x \in (0, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = -x^2 + 2x$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$.

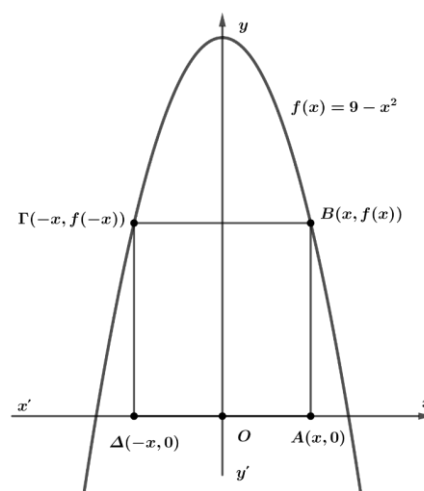
28. ΘΕΜΑ_4_27408

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 9 - x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Οι κορυφές $A(x, 0)$ και $\Delta(-x, 0)$ είναι σημεία του άξονα $x'x$, ενώ οι κορυφές $B(x, f(x))$ και $\Gamma(-x, f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση του $x \in [0, 3]$ δίνεται από την συνάρτηση

$$E(x) = 18x - 2x^3.$$

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία.



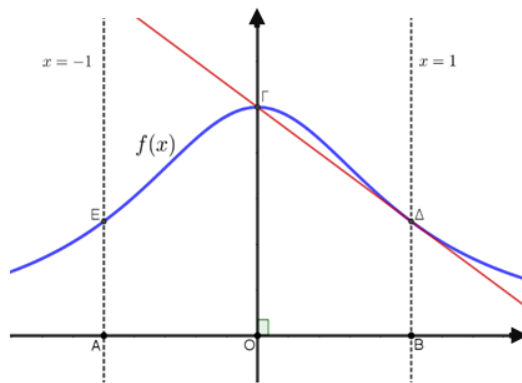
- γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες.
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του.

29. ΘΕΜΑ_4_23955

Στο σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και οι ευθείες με εξισώσεις } x = -1$$

και $x = 1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ.



- α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ.
- β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ.
- γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x) dx > \frac{3}{2}$.

30. ΘΕΜΑ_4_25757

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

- α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.
- β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [0,1]$, ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1-x$.
- γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό Ε του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ ισχύει $E < \frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

31. ΘΕΜΑ_4_25259

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε η γραφική παράσταση της f , να εφάπτεται της $(\varepsilon): y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$, η f είναι κυρτή και $f(1) = 1$.

- α) Να αποδειχθεί ότι: **i.** $f(0) = \frac{1}{4}$ και $f'(0) = 0$, **ii.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x) - 1}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 0$.

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0,1]$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f' , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

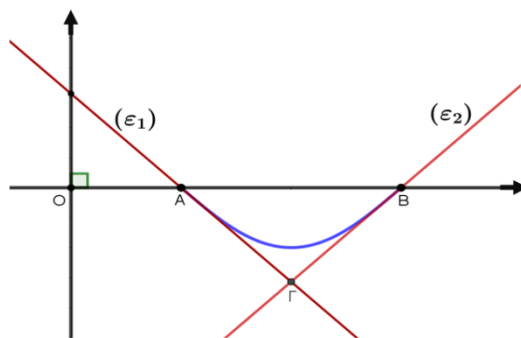
32. ΘΕΜΑ_4_25235

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, της

οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα. Στα

σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν

σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ .



α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι $(\varepsilon_1) y = -x + \frac{\pi}{2}$ και

$(\varepsilon_2) y = x - \frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) .

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$.

33. ΘΕΜΑ_4_24704

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο A τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E = e + (x_0 - 1)(1 - \ln x_0)$.

34. ΘΕΜΑ_4_24275

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y = -x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ , η οποία είναι μεγαλύτερη του 1.

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\rho$ ισούται με $E(\Omega) = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho-1) + e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες.

35. ΘΕΜΑ_4_23218

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμψής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμψής K .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους.

γ) Έστω ότι $K(-1, \lambda + 3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2 , με $x_1 < -1 < x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_p στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_p και των ευθειών $x = x_1, x = -1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_p και των ευθειών $x = x_2, x = -1$.

36. ΘΕΜΑ_4_24131

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$, $x \geq 0$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες C_1, C_2 . Με δεδομένα ότι

- η μία από τις δύο καμπύλες αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της f και η άλλη στην γραφική παράσταση της f^{-1} ,

- $\int_{\frac{1}{2}}^0 f^{-1}(x) dx = \alpha$

Να βρείτε:

i. ποια καμπύλη παριστάνει την γραφική παράσταση της f και ποια την γραφική παράσταση της f^{-1} ,

ii. το πρόσημο του α καθώς και το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) dx$ συναρτήσει του α .

37. ΘΕΜΑ_4_25244

Δίνεται η συνάρτηση με $f(x) = \varepsilon\phi x - 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x = (1+x)\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια ακριβώς λύση στο ανοικτό διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τις ευθείες $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ και τον άξονα $x'x$.