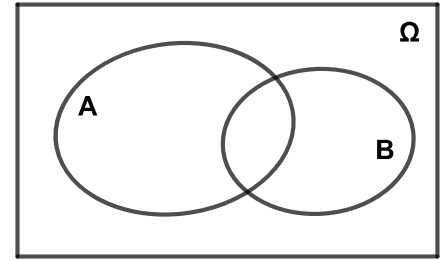


### 1.3 Πιθανότητες και πράξεις με ενδεχόμενα

1.
  - α) Έστω ένα πείραμα τύχης με  $n$  ισοπίθανα αποτελέσματα. Με  $P(A)$  συμβολίζουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου  $A$  που περιέχει  $k$  τέτοια αποτελέσματα. Να αντιγράψετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε την παρακάτω πρόταση:  
 «Η πιθανότητα του ενδεχομένου  $A$ , σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό πιθανότητας, είναι ίση με .... ».
  - β) Έστω  $A$  ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Αν  $A'$  είναι το συμπληρωματικό ή αντίθετο ενδεχόμενο του  $A$ :
    - i. Να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα Venn στο οποίο να φαίνονται τα  $A$  και  $A'$ .
    - ii. Να εξηγήσετε, με τη βοήθεια του διαγράμματος Venn, γιατί ισχύει  $A \cup A' = \Omega$ .
    - iii. Να εξηγήσετε, γιατί τα  $A$  και  $A'$  είναι ασυμβίβαστα.
    - iv. Να αποδείξετε ότι  $P(A') = 1 - P(A)$ , όπου  $P(A)$  και  $P(A')$  είναι οι πιθανότητες των  $A$  και  $A'$ , αντίστοιχα.
2. Σ' ένα δείγμα 3.000 φορολογούμενων πολιτών, οι 600 έχουν ελεγχθεί από την Ανεξάρτητη Αρχή Δημοσίων Εσόδων (Α.Α.Δ.Ε) τουλάχιστον μία φορά κατά το παρελθόν. Κατά το τρέχον έτος, η ΑΑΔΕ επιλέγει για έλεγχο, τυχαία, έναν από τους παραπάνω 3.000 φορολογούμενους. Έστω το ενδεχόμενο,  $A$ : «ο φορολογούμενος έχει ελεγχθεί τουλάχιστον μία φορά κατά το παρελθόν» και το συμπληρωματικό ενδεχόμενο  $A'$  του  $A$ .
  - α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $A$ .
  - β) Να διατυπώσετε λεκτικά το ενδεχόμενο  $A'$ .
  - γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $A'$ .
3. Από σχετική μελέτη γνωρίζουμε ότι το 50% των εργαζομένων μιας πόλης για την μετάβασή τους στην εργασία τους χρησιμοποιούν κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς, το 40% χρησιμοποιούν κάποιο ιδιωτικό μέσο μεταφοράς και 10% χρησιμοποιούν και κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς και ιδιωτικό μέσο μεταφοράς. Επιλέγουμε τυχαία έναν εργαζόμενο αυτής της πόλης. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να μεταβαίνει στην εργασία του:
  - α) Με κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς ή με ιδιωτικό μέσο μεταφοράς.
  - β) Να μην χρησιμοποιεί μέσο μαζικής ούτε ιδιωτικό μέσο μεταφοράς.
4. Σε ένα σχολείο φοιτούν 120 μαθητές στη Γ Λυκείου και όλοι προετοιμάζονται να διαγωνιστούν στα τέσσερα μαθήματα προσανατολισμού για την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Κάποιοι από τους μαθητές αυτούς, επιλέγουν να διαγωνιστούν και σε αθλήματα ή Αγγλικά. Συγκεκριμένα, 40 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και σε αθλήματα, 15 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και στα Αγγλικά, ενώ 10 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και σε αθλήματα και στα Αγγλικά. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους 120 μαθητές και θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα:  
 $A$  : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί και στα αθλήματα» και  
 $\Gamma$  : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί και στα Αγγλικά»
  - α) Να πείτε πότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο  $A \cup \Gamma$  και να βρείτε την πιθανότητα του.
  - β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής διαγωνίζεται μόνο στα τέσσερα μαθήματα προσανατολισμού».

5. Ρωτήθηκαν 100 άτομα για το μέσο ή τα μέσα μεταφοράς που χρησιμοποίησαν στις διακοπές τους το περσινό καλοκαίρι. Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το A έχει ως στοιχεία τα άτομα που χρησιμοποίησαν πλοίο και το B εκείνους που χρησιμοποίησαν αεροπλάνο. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από τα παραπάνω.

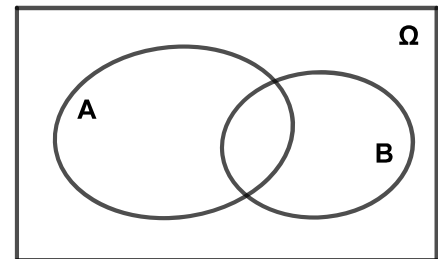


- α) Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κτλ.) να εκφράσετε τα ενδεχόμενα το άτομο που επιλέγουμε:
- i. Χρησιμοποίησε πλοίο και αεροπλάνο,                      ii. Χρησιμοποίησε μόνο αεροπλάνο.
- β) Από τα 100 άτομα που ρωτήθηκαν, 75 άτομα απάντησαν ότι ταξίδεψαν με πλοίο, 35 άτομα ότι ταξίδεψαν με αεροπλάνο και 20 άτομα ταξίδεψαν και με τα δύο μεταφορικά μέσα. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
- $E_1$ : «Το άτομο που επιλέγουμε χρησιμοποίησε ένα τουλάχιστον από τα δύο μέσα».
- $E_2$ : «Το άτομο που επιλέγουμε να έχει ταξιδέψει μόνο με αεροπλάνο».
6. Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A, B δύο ενδεχόμενά του.

- α) Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κτλ.), να εκφράσετε τα ενδεχόμενα:

- i. Πραγματοποιείται το A και το B,                      ii. Πραγματοποιείται το B αλλά όχι το A.

Μπορείτε αν θέλετε να απαντήσετε χρησιμοποιώντας το παρακάτω διάγραμμα Venn, σκιάζοντας κάθε φορά το μέρος εκείνο που αναφέρεται στο ζητούμενο ενδεχόμενο.



- β) Θεωρούμε το πείραμα τύχης: «Ρίψη ενός νομίσματος δύο φορές» με δειγματικό χώρο  $\Omega = \{KK, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$  και τα ενδεχόμενα A και B που ορίζονται ως εξής:
- A: «Στην 1η ρίψη φέρουμε κεφαλή (K)»,  
 B: «Φέρουμε διαφορετική ένδειξη και στις 2 ρίψεις».
- i. Να γράψετε τα στοιχεία των ενδεχομένων A και B.  
 ii. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων του ερωτήματος α).
7. Ο Κώστας και ο Νίκος έχουν ο καθένας ένα συνηθισμένο ζάρι και παίζουν το εξής παιχνίδι: Ρίχνει ο καθένας το δικό του ζάρι και καταγράφουν το αποτέλεσμα. Αν και οι δύο αριθμοί που φέρνουν ο Κώστας και ο Νίκος, είναι μεγαλύτεροι από το 2, τότε κερδίζει ο Κώστας. Διαφορετικά κερδίζει ο Νίκος.
- α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης να γράψετε τον δειγματικό χώρο, όπου για παράδειγμα, το αποτέλεσμα (2,5) να σημαίνει ότι ο Κώστας έφερε 2 και ο Νίκος 5.
- β) Να βρείτε τις πιθανότητες: i. να κερδίσει ο Κώστας, ii. να κερδίσει ο Νίκος.
8. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο κέρμα τρεις φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα.
- α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης να γράψετε έναν δειγματικό χώρο και το ενδεχόμενο  
 A: «Το αποτέλεσμα των τριών ρίψεων είναι τουλάχιστον δύο φορές κεφαλή».

β) Να γράψετε το συμπληρωματικό ενδεχόμενο  $A'$  του  $A$ .

γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A$  και  $A'$ .

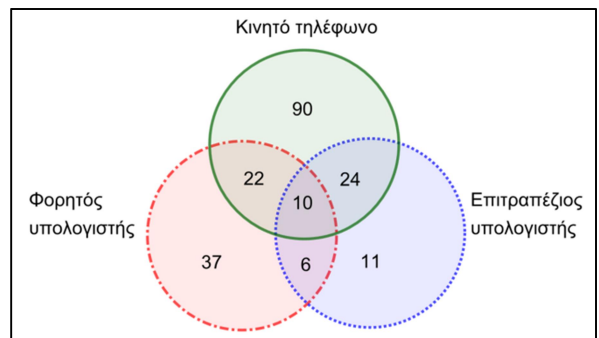
9. Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα τα οποία χωρίζονται σε τέσσερις φυλές: τις κούπες, τα καρό, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή αποτελείται από 13 φύλλα: τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 τις φιγούρες βαλέ (J), ντάμα (Q), ρήγα (K) και τον άσο (A). Η Άννα τράβηξε τυχαία ένα φύλλο από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα. Έστω τα ενδεχόμενα

$A$ : «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι αριθμός» και  $M$ : «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι μπαστούνι».

α) Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα  $A \cap M$  και  $A \cup M$ .

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: **i.**  $A$ ,  $M$  και  $A \cap M$  **ii.**  $A \cup M$ .

10. Σε μία έρευνα συμμετείχαν 200 άτομα, τα οποία συνδέθηκαν τουλάχιστον μία φορά την προηγούμενη εβδομάδα στο διαδίκτυο. Η ερώτηση της έρευνας αφορούσε τη συσκευή ή τις συσκευές με τις οποίες συνδέθηκαν. Το παρακάτω διάγραμμα Venn για τα άτομα που συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο, με φορητό υπολογιστή ή με επιτραπέζιο υπολογιστή δείχνει τα αποτελέσματα της έρευνας.



α) Πόσα από τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα, κατά τη διάρκεια της εβδομάδας:

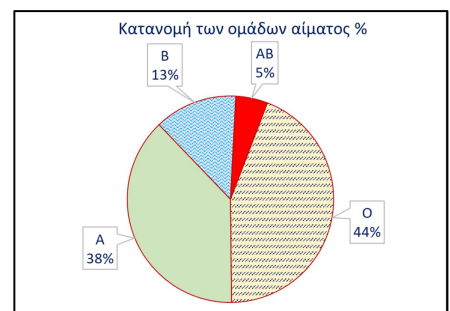
- συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο,
- συνδέθηκαν μόνο με κινητό τηλέφωνο,
- συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο αλλά όχι με επιτραπέζιο υπολογιστή;

β) Ένα από τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα, επιλέγεται τυχαία.

Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο αυτό κατά τη διάρκεια της εβδομάδας:

- να συνδέθηκε με κινητό τηλέφωνο,
- να συνδέθηκε τουλάχιστον με δύο τρόπους,
- να συνδέθηκε ακριβώς με έναν από τους τρεις τρόπους.

11. Κάθε άνθρωπος ανήκει σε μία μόνο, από τις τέσσερις κύριες ομάδες αίματος O, A, B ή AB. Είναι γνωστό ότι η ομάδα O μπορεί να δώσει αίμα σε όλες τις ομάδες (O, A, B και AB). Η ομάδα A μπορεί να δώσει αίμα μόνο στις A και AB. Η ομάδα B μπορεί να δώσει αίμα μόνο στις B και AB. Τέλος, η ομάδα AB μπορεί να δώσει αίμα μόνο στην AB. Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα φαίνεται η ποσοστιαία κατανομή των ομάδων αίματος σε μία πόλη.



Ένα άτομο από αυτή την πόλη, επιλέγεται τυχαία. Να βρείτε την πιθανότητα, αυτό να μπορεί:

- να δώσει αίμα σε οποιοδήποτε άτομο,
- να δώσει αίμα σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα A,
- να δώσει αίμα σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα A ή σ' ένα που ανήκει στην ομάδα B,
- να δεχθεί αίμα από ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα B,
- να δεχθεί αίμα από οποιοδήποτε άτομο.

12. Σε ένα σχολείο φοιτούν 600 μαθητές. Οι γυμναστές του σχολείου ανά μήνα προσπαθούν να εξοικειώνουν τους μαθητές τους με διαφορετικές αθλητικές δραστηριότητες. Ο μήνας Φεβρουάριος είναι αφιερωμένος στη Γιόγκα και το Χορό. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να επιλέξει τουλάχιστον μια από τις δραστηριότητες Χορό ή Γιόγκα. 420 μαθητές επέλεξαν το Φεβρουάριο να ασχοληθούν με Γιόγκα και 330 με Χορό. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή του σχολείου. Ονομάζουμε  $\Gamma$  το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει Γιόγκα» και  $X$  το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει Χορό».
- α) i. Υπάρχουν μαθητές του σχολείου που διάλεξαν το Φεβρουάριο να ασχοληθούν και με τις δύο δραστηριότητες (Χορό και Γιόγκα);  
 ii. Είναι τα ενδεχόμενα  $\Gamma$  και  $X$  ασυμβίβαστα;
- β) Τα ενδεχόμενα: «ο μαθητής επιλέγει μόνο Χορό» και «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα» είναι ασυμβίβαστα;
- γ) i. Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα» ισούται με  $\frac{270}{600}$ .  
 ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής επιλέγει μόνο μια από τις προτεινόμενες αθλητικές δραστηριότητες του μήνα».
13. Σ' ένα εκπαιδευτικό κατάστημα, ένας πελάτης θέλει να αγοράσει ένα πουκάμισο και ένα μπουφάν. Τα διαθέσιμα μεγέθη και για τα δύο είδη είναι μικρό (s), μεσαίο (m), και μεγάλο (L). Τα σωστά μεγέθη που φοράει ο πελάτης, για το πουκάμισο είναι μεσαίο (m), ενώ για το μπουφάν, είναι μεγάλο (L). Ο πελάτης επιλέγει τυχαία ένα πουκάμισο και ένα μπουφάν χωρίς να κοιτάζει τα μεγέθη τους.
- α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης, να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο που να περιέχει όλες τις δυνατές επιλογές για το μέγεθος των δύο ειδών (πουκάμισο και μπουφάν) που επιλέγει ο πελάτης.
- β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:  
 i. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το πουκάμισο.  
 ii. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το μπουφάν.  
 iii. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για ένα τουλάχιστον από τα δύο είδη.  
 iv. Ο πελάτης δεν επέλεξε το σωστό μέγεθος σε κανένα από τα δύο είδη.
14. Ένα μη αμερόληπτο ζάρι με δειγματικό χώρο  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  είναι φτιαγμένο έτσι, ώστε η πιθανότητα του απλού ενδεχομένου  $\{6\}$  να είναι ίση με  $\frac{1}{3}$ . Για τις άλλες 5 έδρες του ισχύουν τα εξής: Τα απλά ενδεχόμενα  $\{1\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{5\}$  είναι ισοπίθανα και η πιθανότητα του ενδεχομένου  $A = \{1, 3, 5\}$  είναι ίση με  $\frac{1}{6}$ . Τα απλά ενδεχόμενα  $\{2\}$  και  $\{4\}$  είναι επίσης ισοπίθανα.
- α) Να αποδείξετε ότι: i.  $P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{18}$ ,      ii.  $P(\{2\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$ ,
- β) Σε μία τυχαία ρίψη του ζαριού, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:  
 i. A: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος»,      ii. B: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 3 ή 4»
- γ) Αν το ζάρι είναι αμερόληπτο με δειγματικό χώρο  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου B του ερωτήματος β) ii. και να συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

- 15.** Σ' ένα διαγώνισμα δύο ερωτήσεις είναι πολλαπλής επιλογής, με τέσσερις δυνατές απαντήσεις η καθεμία τις  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $\delta$ . Η σωστή απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι η  $\alpha$  και στη δεύτερη η  $\delta$ . Ένας μαθητής επιλέγει τυχαία την απάντηση για καθεμία από τις δύο ερωτήσεις.
- α)** Για το παραπάνω πείραμα τύχης, να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο που να περιέχει όλες τις δυνατές απαντήσεις στις δύο ερωτήσεις.
- β)** Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
- i.** ο μαθητής απάντησε σωστά στην πρώτη ερώτηση,
  - ii.** ο μαθητής απάντησε σωστά στη δεύτερη ερώτηση,
  - iii.** ο μαθητής απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις,
  - iv.** ο μαθητής δεν απάντησε σωστά σε καμία από τις δύο ερωτήσεις.